一般状态马氏过程分析理论



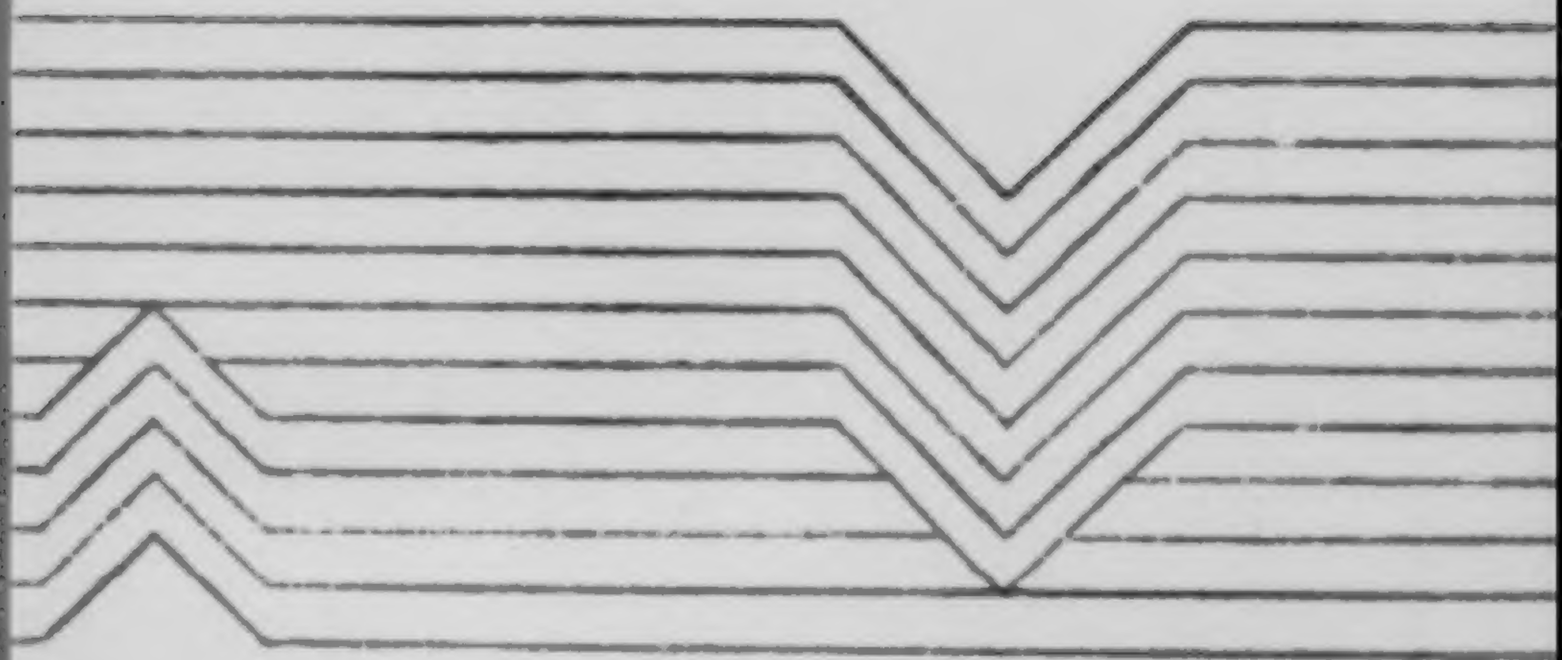
中国科学院科学基金资助课题

胡迪鹤

湖北教育出版社

一般状态马氏过程分析理论

中国科学院科学基金资助课题



一般状态马氏过程分析理论

胡迪鹤

湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行
湖北教育出版社印刷厂印刷
850×1168毫米32开本　8.25印张　2插页　200,000字
1985年9月第1版　1985年9月第1次印刷
统一书号：7306·233　定价：(简精装)3.00

序

马尔可夫过程是随机过程中历史最悠久的一个分枝，也是目前发展很迅速的一个分枝。马尔可夫过程的初期研究（从二十世纪初到二十世纪五十年代），主要集中在可数状态方面．这方面奠基性的专著如〔49〕。近年来国内在这方面也出了不少专著，如〔29〕、〔31〕、〔32〕、〔33〕、〔34〕。五十年代以来，随着现代分析理论的发展，一方面可数状态的马尔可夫过程继续向纵深发展，另一方面，一般状态的马尔可夫过程得到了迅速发展．奠基性的专著如〔5〕、〔6〕。

本书主要研究一般状态的马尔可夫过程的分析理论，轨道理论基本未涉及．全书除了一小部分泛函分析方面的基本知识（如*Bochner*积分、算子半群理论、*Banach*代数）外，主要是作者近年来在马尔可夫过程的分析理论方面研究工作的小结．

全书共分三编二十七节．第一编讨论时齐的转移函数及其所产生的算子半群的性质；第二编讨论时齐的q过程的构造理论；第三编讨论非时齐的转移函数的各种分析性质．

作者力图把本书写得通俗易读．对于掌握“测度论”、“泛函分析”和“点集拓扑”初步知识的读者，阅读此书，不会产生多大困难．

限于作者学识浅薄，本书缺点错误定然不少，敬希不吝指正．

胡迪鹤

1984年于武汉大学

目　录

第　一　编
时齐的准转移函数及算子半群的分析理论

本书符号及术语，多沿袭近代随机过程理论中所通用者．例如从集合E_1到E_2中的变换f，记作f：$E_1 \to E_2$，为了突出自变量及对应关系有时也记作$t \to f(t)$或$t \to f_t$．如E_i中还有σ代数$\mathscr{E}_i$，f关于$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$可测，则记作$f \in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$．特别地，若$E_2 = R^1 = (-\infty, \infty)$，$\mathscr{E}_2$是$R^1$中的全体Borel集合，则简记为$f \in \mathscr{E}_1$．而$f \in b\mathscr{E}_1$表$f \in \mathscr{E}_1$且有界，$f \in \mathscr{E}_1^+$表$f \in \mathscr{E}_1$且非负．对任何$A \in \mathscr{E}_1$，$I_A$表$A$的示性函数，即$I_A(x) = 1$或0视$x$属于$A$或不属于$A$而定．有时记$I_A(x)$为$\varepsilon_x(A)$或$\delta(x, A)$．本书所言测度均非负．若$(E_1, \mathscr{E}_1, \mu)$是测度空间，$f \in \mathscr{E}_1$，$A \in \mathscr{E}_1$，$f$在$A$上关于$\mu$的积分记作$\int_A f d\mu$或$\int_A f(x)\mu(dx)$．若$\mathscr{M}$是集合$E$上的集合系，则记$\sigma(\mathscr{M})$为由$\mathscr{M}$所产生的$\sigma$代数．$a \wedge b = \min(a, b)$，$a \vee b = \max(a, b)$，$\mathscr{B}_\infty^0$表$[0, \infty)$中的全体Borel集合．

§1　准转移函数及算子半群

设$\boldsymbol{T} \subset (-\infty, \infty)$，$(E, \mathscr{E})$是可测空间．

定义1.1　称$P(s, t, x, A)$　$(s \leqslant t, s, t \in \boldsymbol{T}, x \in E, A \in \mathscr{E})$是准转移函数，如果

(i) 对任意的$s\leqslant t$, s, $t\in\boldsymbol{T}$, $x\in E$, $P(s, t, x, \cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度，且$P(s, t, x, E)\leqslant 1$;

(ii) 对任意的$s\leqslant t$, s, $t\in\boldsymbol{T}$, $A\in\mathscr{E}$,有

$$P(s, t, \cdot, A)\in\mathscr{E},\ P(s, s, x, A)=I_A(x);$$

(iii) 满足$(K-C)$方程式，即是对任意的$s\leqslant t\leqslant u$, s, t, $u\in\boldsymbol{T}$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, 都有

$$P(s, u, x, A)=\int_E P(s, t, x, dy)P(t, u, y, A).$$

特别地，满足$P(s, t, x, E)\equiv 1$的准转移函数称为转移函数，满足 $P(s+h, t+h, x, A)\equiv P(s, t, x, A)$ $(s\leqslant t, s, t, s+h, t+h\in\boldsymbol{T}, x\in E, A\in\mathscr{E})$的（准）转移函数称为时齐的（准）转移函数。对时齐的（准）转移函数，$(K-C)$方程式变为：

$$P(s+t, x, A)=\int_E P(s, x, dy)P(t, y, A),$$

$(s, t\in\boldsymbol{T}, x\in E, A\in\mathscr{E})$.

本编所讨论的（准）转移函数，都是时齐的，如不特别申明，总令$\boldsymbol{T}=[0, \infty)$.

定义1.2 由 *Banach* 空间$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{B}$的有界线性算子族$\{F_t;\ t\in\boldsymbol{T}\}$称为一个半群，如果

$F_{s+t}=F_s\circ F_t$, $(s, t\in\boldsymbol{T}$, $F_0=I$是恒等算子，$F_s\circ F_t$表复合算子）。特别地，如果还有正实数β，使

$$\|F_t\|\leqslant e^{\beta t},\ (t\in\boldsymbol{T}),$$

则称此半群是标准型的，更特别地，若

$$\|F_t\|\leqslant 1,\ (t\in\boldsymbol{T}),$$

则称此半群是压缩型的。（此处$\|F_t\|$表算子F_t的范数。）

下面我们给出两个 *Banach* 空间，并给出由准转移函数所产生的两个半群。

(1) $\mathscr{M}=\{f; f\in b\mathscr{E}\}$，在$\mathscr{M}$中按函数的普通加法与数量乘法来定义线性运算，并定义范数$\|f\|=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$, $(f\in\mathscr{M})$，则$\mathscr{M}$构

成Banach空间。

(2) $\mathscr{L}=\{\varphi:\varphi$是$\mathscr{E}$上完全可加的实值的集合函数$\}$. 在$\mathscr{L}$中定义线性运算如下：

$$(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)(A)=c_1\varphi_1(A)+c_2\varphi_2(A),$$

$(\varphi_1,\ \varphi_2\in\mathscr{L},\ c_1,\ c_2$是实数, $A\in\mathscr{E})$,

再定义范数

$$\|\varphi\|=|\varphi|(E),\ (\varphi\in\mathscr{L}),$$

$|\varphi|=\varphi^++\varphi^-,\ \varphi^+(A)=\varphi(AF),\ \varphi^-(A)=-\varphi(AG),$

$(A\in\mathscr{E},\ (F,\ G)$是$\varphi$的一组Hahn分解). 则$\mathscr{L}$亦为一Banach空间.

下面我们从准转移函数$P(t,\ x,A)$在$\mathscr{M}$和$\mathscr{L}$上分别构造两个算子半群.

(1) $\{P_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$.

任取$f\in\mathscr{M}$, 定义

$$(P_tf)(x)=\int_E P(t,\ x,\ dy)f(y),\quad (t\in\boldsymbol{T},\ x\in E),$$

显然, P_t是定义在$\mathscr{M}$上取值于$\mathscr{M}$中的有界线性算子. 由$P(t,x,\ A)$满足$(K-C)$方程式可知: $P_s\cdot P_t=P_t\cdot P_s=P_{s+t}$, $(s,\ t\in\boldsymbol{T})$, 再注意$P(t,\ x,\ E)\leqslant1$, $(t\in\boldsymbol{T},x\in E)$可知$\{P_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$是压缩型的半群.

(2) $\{V_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$.

任取$\varphi\in\mathscr{L}$, 定义

$$(V_t\varphi)(A)=\int_E\varphi(dx)\,P(t,\ x,\ A),\ (t\in\boldsymbol{T},\quad A\in\mathscr{E}).$$

显然, V_t是定义在$\mathscr{L}$上取值于$\mathscr{L}$中的有界线性算子, 而由$P(t,x,A)$ 满足$(K-C)$方程式可得:

$$(V_{s+t}\varphi)(A)=\int_E\varphi(dx)P(s+t,\ x,\ A)$$

$$=\int_E\varphi(dx)\int_E P(s,\ x,\ dy)P(t,\ y,\ A)$$

$= (V_t \cdot V_s\varphi)(A)$，$(s, t \in \boldsymbol{T}, A \in \varepsilon)$。

显然$\|V_t\varphi\| \leqslant \|\varphi\|$，$(\varphi \in \mathscr{L}, t \in \boldsymbol{T})$，所以$\{V_t; t \in \boldsymbol{T}\}$是压缩型半群。

命题1.1 任取$f \in \mathscr{M}$，$\varphi \in \mathscr{L}$，定义

$$(f, \varphi) = \int_E \varphi(dx) f(x),$$

则$(P_t f, \varphi) = (f, V_t\varphi)$。

证： $(P_t f, \varphi) = \int_E \varphi(dx) \int_E P(t, x, dy) f(y) = (f, V_t\varphi)$。

由命题1.1看出：$\{P_t; t \in \boldsymbol{T}\}$与$\{V_t: t \in \boldsymbol{T}\}$ 相互唯一决定。事实上，若令$I_A(x)$是A上的示性函数，ε_x是$\mathscr{E}$上的测度值集中在$\{x\}$的概率测度，则

$$(V_t\varphi)(A) = (I_A, V_t\varphi) = (P_t I_A, \varphi),$$

$$(P_t f)(x) = (P_t f, \varepsilon_x) = (f, V_t\varepsilon_x).$$

现在我们来看一个特殊情形。若E是非负整数集，记$p_{i,j}(t) = P(t, i, \{j\})$，则$P(t, x, A)$由$p_{i,j}(t)$ 所唯一决定。这时，$\mathscr{M}$为

$$(m) = \left\{y: \ y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \sup_{j \geqslant 0} |y_j| < \infty\right\},$$

$\mathscr{L}$为

$$(l) = \left\{\alpha': \ \alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots), \ \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty\right\}.$$

而$\{P_t: t \in \boldsymbol{T}\}$和$\{V_t: t \in \boldsymbol{T}\}$分别由下式决定：

$$P_t y = P(t) y, \ (t \in \boldsymbol{T}, \ y \in (m)),$$

$$V_t \alpha' = \alpha' P(t), \ (t \in \boldsymbol{T}, \ \alpha' \in (l)),$$

其中 $P(t) = (p_{i,j}(t), \ i, j \geqslant 0)$是由$p_{i,j}(t)$为元素构成的矩阵，而上述两式右端是普通的矩阵乘法。

§2 强极限与Bochner积分

定义2.1 设$\boldsymbol{B}$是一个 *Banach* 空间，

(1) 设f_n，$f\in\boldsymbol{B}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$，则称$\{f_n\}$强收敛到$f$，或称$f$是$\{f_n\}$的强极限，记之为$f=(s)\lim\limits_{n\to\infty}f_n$，或$f_n\xrightarrow{(s)}f$，（当$n\to\infty$）。

(2) 设$t\to f_t$是定义在$[a, b]$上取值于$\boldsymbol{B}$的抽象函数，$t_0\in[a, b]$，若

$$(s)\lim_{t\to t_0} f_t=f_{t_0}$$

则称f_t在t_0强连续。如果f_t在$[a, b]$上每一点都强连续，则说f_t在$[a, b]$上强连续。

若存在$g_{t_0}\in\boldsymbol{B}$，使

$$(s)\lim_{h\to 0}\frac{f_{t_0+h}-f_{t_0}}{h}=g_{t_0},$$

则称f_t在t_0是强可导的，g_{t_0}称为f_t在t_0的强导数，记之为$f'_{t_0}=g_{t_0}$或$(s)\left.\dfrac{df_t}{dt}\right|_{t=t_0}=g_{t_0}$。如果$f_t$在$[a, b]$上每一点都是强可导的，则说$f_t$在$[a, b]$上强可导。

例如，若$\boldsymbol{B}=\mathscr{M}$，$\mathscr{M}$的定义如§1，则$\mathscr{M}$中之强收敛即数学分析中的一致收敛。

定义2.2 设$\mathscr{F}^1$为R^1中一切Lebesgue可测集，μ^*是$\mathscr{F}^1$上的Lebesgue测度，遂得完备测度空间$(R^1, \mathscr{F}^1, \mu^*)$。$\boldsymbol{B}$是 *Banach* 空间，$S\in\mathscr{F}^1$，$f_t$：$S\to\boldsymbol{B}$，称$f_t$在$S$上关于$\mathscr{F}^1$强可测（简称强可测），如果存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)},\ [a.e.]\text{in } S(\mu^*).$$

(所谓g_t是简单抽象函数，意即$g_t=\sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}(t)$，$c_i\in \boldsymbol{B}$，$A_i$是$S$中的可测子集，$A_1$，…，$A_k$两两不交，$\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$。)

命题2.1 (甲) 若$\{g_t^{(n)}\}$是强可测函数列，且

$g_t=(s)\lim\limits_{n\to\infty} g_t^{(n)}$，$[a.e.]\text{in } S\ (\mu^*)$，则 g_t 亦为强可测函数。

(乙) 若f_t是强可测函数，则

(1) $\|f_t\|$是实变实值的 *Lebesgue* 可测函数；

(2) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$\|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$(n\geqslant 1,\ t\in S)$，

$f_t=(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}$，$[a.e.]\text{in } S(\mu^*)$。

证：(甲) 显然成立。下证 (乙)。

(1) 对简单抽象函数$f_t^{(n)}=\sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} I_{A_i^{(n)}}(t)$，总有

$$\|f_t^{(n)}\|=\sum_{i=1}^{k_n}\|c_i^{(n)}\| I_{A_i^{(n)}}(t)$$

是实变实值 *Lebesgue* 可测函数，但f_t强可测，故必存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$使

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)},\ [a.e.]\text{in } S,\ (\mu^*).$$

由范数的连续性得

$$\|f_t\|=\lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}\|,\ [a.e.]\text{in } S,\ (\mu^*).$$

而今$\|f_t^{(n)}\|$是 *Lebesgue* 可测的，故$\|f_t\|$亦然。

(2) 设$\{g_t^{(n)}\}$是简单抽象函数列，满足

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty} g_t^{(n)},\ [a.e]\text{in } S,\ (\mu^*),$$

取

$$f_i^{(n)}=\begin{cases}0, & 当\|g_i^{(n)}\|>2\|f_i^{(n)}\|,\\ g_i^{(n)}, & 反之,\end{cases}$$

则$\{f_i^{(n)}\}$即为所求。

定义2.3 （*Bochner* 积分）设 $(R^1, \mathscr{F}^1, \mu^*)$、$S$、$\boldsymbol{B}$ 如定义2.2。f_t: $S\to\boldsymbol{B}$，f_t是强可测的，且$\|f_t\|$在S上 *Lebesgue* 可积。

（1）若f_t是简单抽象函数：

$$f_t=\sum_{i=1}^{n}c_i I_{A_i}(t),$$

$A_i\in\mathscr{F}^1$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$(i\neq j)$，$c_i\in\boldsymbol{B}$，则定义f_t（在S上）的 *Bochner* 积分为

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\mu^*(A_i),$$

记之为

$$(s)\int_S f_t\,dt=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu^*(A_i).$$

注意：$\|f_t\|=\sum_{i=1}^{n}\|c_i\|I_{A_i}(t)$，而又设

$$\int_S\|f_t\|dt<\infty,$$

所以$\|c_i\|\mu^*(A_i)<\infty$，$(i=1,\cdots n)$。因此

$$“\mu^*(A_i)=\infty\Longrightarrow c_i=0”.$$

若约定$0\cdot\infty=0$，则上面的积分恒为$\boldsymbol{B}$中一元素。这说明对满足定义2.3中的条件的简单抽象函数f_t，其 *Bochner* 积分必存在。而积分值的唯一性是显然的。

（2）设f_t是一般的强可测函数，且$\|f_t\|$在S上 *Lebesgue* 可积。

若对任意一列简单抽象函数

$$f_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} I_{A_i^{(n)}}(t)$$

来说，只要$\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2\|f_t\|$，而且

$$f_t = (s)\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)}, \quad [a.e.] \quad in \quad S \ (\mu^*),$$

均存在$h \in \boldsymbol{B}$，使

$$h = (s)\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} \mu^*(A_i^{(n)}) = (s)\lim_{n\to\infty}\left((s)\int_S f_t^{(n)} dt\right),$$

而且h不依赖$\{f_t^{(n)}\}$的选取，则称f_t在S上是Bochner可积的，h称为其积分值，记之为

$$h = (s)\int_S f_t dt.$$

对于任何一个可测子集$S_1 \subset S$，定义

$$(s)\int_{S_1} f_t dt = (s)\int_S I_{S_1}(t) f_t dt.$$

定理2.1 设f_t强可测，且$\|f_t\|$在S上是Lebesgue可积的，则f_t在S上Bochner可积。

证： 由命题2.1，可取简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} \|f_t^{(n)} - f_t\| = 0, \quad [a.e.] \quad in \quad S \ (\mu^*), \tag{2.1}$$

$$\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2\|f_t\|, \quad (n \geqslant 1, \ t \in S). \tag{2.2}$$

由(2.1),(2.2)并应用控制收敛定理可得：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} \left\|(s)\int_S f_t^{(n)} dt - (s)\int_S f_t^{(m)} dt\right\| \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty} \int_S \|f_t^{(n)} - f_t^{(m)}\| dt \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty} \left(\int_S \|f_t^{(n)} - f_t\| dt + \int_S \|f_t - f_t^{(m)}\| dt\right) \\
&= \left(\int_S \lim_{n\to\infty} \|f_t^{(n)} - f_t\| dt + \int_S \lim_{m\to\infty} \|f_t - f_t^{(m)}\| dt\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

由Banach空间$\boldsymbol{B}$的完备性得知：存在$h\in\boldsymbol{B}$，使得，

$$h=(s)\lim_{n\to\infty}\Big((s)\int_S f_t^{(n)}dt\Big).$$

若有两列简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$、$\{g_t^{(n)}\}$，使得：

$\|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$\|g_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$(n\geqslant 1)$，

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)}=(s)\lim_{n\to\infty}g_t^{(n)},\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*),$$

往证：

$$(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S g_t^{(n)}dt. \tag{2.4}$$

（注意：如前所证，(2.4)两端的极限存在。）事实上，作

$$h_t^{(n)}=\begin{cases}f_t^{(n)}, & n\text{为奇数},\\ g_t^{(n)}, & n\text{为偶数},\end{cases}$$

则$\|h_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，$(n\geqslant 1)$，$\{h_t^{(n)}\}$是简单抽象函数列，且

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}h_t^{(n)},\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*).$$

因此，必存在$h\in\boldsymbol{B}$，使

$$h=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S h_t^{(n)}dt,$$

但是

$$\Big\{(s)\int_S f_t^{(n)}dt\Big\},\quad \Big\{(s)\int_S g_t^{(n)}dt\Big\}$$

都是

$$\Big\{(s)\int_S h_t^{(n)}dt\Big\}$$

的子序列，所以

$$(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S g_t^{(n)}dt=h.$$

至此，定理2.1得证。

系1　设f_t是强可测的，则下列陈述等价：

(1) $\|f_t\|$在S上Lebesgue可积；

(2) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$\|f_t^{(n)}\|$Lebesgue可积，$(n\geqslant 1)$，

$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}=f_t$, $[a.e.]$ *in* S (μ^*),

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0, \quad \|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|.$$

(3) 存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}=f_t$, $[a.e.]$ *in* S (μ^*),

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0,$$

$\|f_t^{(n)}\|$Lebesgue可积，$(n\geqslant 1)$.

证：(1)$\Longrightarrow$(2)．设(1)成立，因f_t是强可测的，由命题2.1得知存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_t^{(n)}=f_t$, $[a.e.]$ *in* S (μ^*),

$\|f_t^{(n)}\|\leqslant 2\|f_t\|$，从而$\|f_t^{(n)}\|$Lebesgue可积．

由$\|f_t^{(n)}-f_t\|\leqslant 3\|f_t\|$．及$\|f_t\|$在$S$上Lebesgue可积，用 Lebesgue 控制收敛定理可得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=\int_S \lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0.$$

(2)$\Longrightarrow$(3)．显然成立．

(3)$\Longrightarrow$(1)．设(3)成立．取$\{f_t^{(n)}\}$满足(3)中条件．由

$\|f_t\|\leqslant\|f_t^{(n)}\|+\|f_t^{(n)}-f_t\|$,

$\|f_t^{(n)}\|$在S上Lebesgue可积，

$$\lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0$$

可知

$\|f_t\|$在S上Lebesgue可积．

系1得证．

命题2.2 设f_t、g_t在S上Bochner可积，则

(1) $\alpha f_t+\beta g_t$在S上Bochner可积(α, $\beta\in R^1$)，且

$$(s)\int_S(\alpha f_t+\beta g_t)dt=\alpha\cdot(s)\int_S f_t dt+\beta\cdot(s)\int_S g_t dt.$$

(2) 若$A_n\in\mathscr{F}^1$, $A_n\subset S$, $A_n\cap A_m=\emptyset(m\neq n)$，则有

$$(s)\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n} f_t dt=\sum_{n=1}^{\infty}(s)\int_{A_n} f_t dt. \tag{2.5}$$

(3) $$\left\|(s)\int_S f_t dt\right\|\leqslant\int_S\|f_t\|dt. \tag{2.6}$$

定理2.2 (控制收敛定理) 设$\{f_t^{(n)}, n\geqslant1\}$是一串定义在$S$上的Bochner可积的抽象函数，而且$\|f_t^{(n)}\|\leqslant\|g_t\|$, $\|g_t\|$ Lebesgue 可积，

$$f_t=(s)\lim_{n\to\infty}f_t^{(n)}, \ [a.e.] \ in \ S \ (\mu^*), \tag{2.7}$$

则f_t在S上也Bochner可积，而且

$$(s)\int_S f_t dt=(s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt. \tag{2.8}$$

证：由(2.7)及范数的连续性有

$$\|f_t\|=\lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}\|, \ [a.e.] \ in \ S \ (\mu^*), \tag{2.9}$$

由(2.7)知f_t是强可测的，从而$\|f_t\|$是Lebesgue可测的。显然，由(2.9)及$\|f_t^{(n)}\|\leqslant\|g_t\|$, $\|g_t\|$是Lebesgue可积的得知$\|f_t\|$是Lebesgue可积的。因此，由定理2.1得知f_t是Bochner可积的。

又因为

$$\left\|(s)\int_S f_t^{(n)}dt-(s)\int_S f_t dt\right\|\leqslant\int_S\|f_t^{(n)}-f_t\|dt,$$

$\|f_t^{(n)}-f_t\|\leqslant2\|g_t\|$, $\|g_t\|$是Lebesgue可积的，

$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}-f_t\|=0$, $[a.e.]$ in S (μ^*),

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\|(s)\int_S f_t^{(n)}dt-(s)\int_S f_t dt\|$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_S \|f_t^{(n)}-f_t\|dt$$
$$=\int_S \lim_{n\to\infty}\|f_t^{(n)}-f_t\|dt=0.$$

定理2.2得证。

定理2.3 若f_t在(a, b)上强连续，则f_t在(a, b)上是强可测的。若还有

$$\int_{(a,b)}\|f_t\|dt<\infty, \tag{2.10}$$

则f_t在 (a, b) 上是 Bochner 可积的。(a 可以是$-\infty$，b 可以是$+\infty$。)

证：取$b_n>a_n$，$b_n\uparrow b$，$a_n\downarrow a$，由f_t在$[a_n, b_n]$ 上强连续得知f_t在$[a_n, b_n]$上一致强连续，令

$$f_t^{(n)}=\sum_{i=1}^{k_n}c_i^{(n)}IA_i^{(n)}(t),\ t\in(a, b),\ n\geqslant 1,$$

$$A_i^{(n)}=\left[a_n+\frac{i-1}{k_n}(b_n-a_n),\ a_n+\frac{i}{k_n}(b_n-a_n)\right],$$

$$C_i^{(n)}=f_{a_n+\frac{i}{k_n}(b_n-a_n)},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n-a_n}{k_n}=0,$$

则$\{f_t^{(n)}\}$就是一串强收敛到f_t的简单抽象函数，此即f_t是强可测的。再注意 (2.10)并利用定理2.1得知f_t在(a, b)上是 Bochner 可积的。

系1 若f_t在$[a, b]$上强连续，a，b是实数，则f_t不仅在$[a, b]$上强可测而且是Bochner可积。

证：由f_t在$[a, b]$上强连续，得$\|f_t\|$在$[a, b]$ 上是实变实值连续函数，由定理2.3即得系1。

定理2.4 若f_t在S上是Bochner可积的，$\|f_t\|$在S上 Lebesgue

可积，F是由Banach空间$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{B}$的有界线性算子，则$F(f_t)$在S上也是Bochner可积的，而且

$$(s)\int_S F(f_t)dt = F\Big((s)\int_S f_t dt\Big). \tag{2.11}$$

证：(1) 对简单抽象函数来说，(2.11)显然成立。

(2) 对一般抽象函数f_t来说，由f_tBochner可积更知f_t是强可测的，从而存在简单抽象函数列$\{f_t^{(n)}\}$，使

$$f_t = (s)\lim_{n\to\infty} f_t^{(n)},\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*), \tag{2.12}$$

$\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2\|f_t\|$,

$$(s)\int_S f_t dt = (s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S f_t^{(n)}dt.$$

利用(1)及F是有界线性算子可得：

$$F\Big((s)\int_S f_t dt\Big) = (s)\lim_{n\to\infty} F\Big((s)\int_S f_t^{(n)}dt\Big)$$

$$= (s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S F(f_t^{(n)})dt. \tag{2.13}$$

再一次利用F是有界线性算子及(2.12)可知存在常数k，使

$$\|F(f_t^{(n)})\| \leqslant k\|f_t^{(n)}\| \leqslant 2k\|f_t\|,$$

$$(s)\lim_{n\to\infty} F(f_t^{(n)}) = F(f_t),\ [a.e.]\ in\ S\ (\mu^*).$$

又因为$\|f_t\|$是Lebesgue可积的，所以由定理2.2得知$F(f_t)$在S上是Bochner可积的，而且

$$(s)\int_S F(f_t)dt = (s)\lim_{n\to\infty}(s)\int_S F(f_t^{(n)})dt. \tag{2.14}$$

由(2.13)、(2.14)即得定理2.4。

定理2.5 若f_t在$[a,\ a+h]$上强连续，则

$$f_a = (s)\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}(s)\int_{[a,\,a+\tau]} f_t dt. \tag{2.15}$$

证：因为

$$\left\|\frac{1}{\tau}(s)\int_{[a,a+\tau]} f_t dt - f_a\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\tau}\int_{[a,a+\tau]}\|f_t - f_a\| dt$$

$$\leqslant \sup_{t\in[a,a+\tau]}\|f_t - f_a\|,$$

所以　由f_t在$[a, a+h]$上的强连续性即得定理2.5。

定理2.6　若f_t在$[a, b]$上是强可导的，而且其强导数f'_t在$[a, b]$上强连续，则

$$(s)\int_{[a,b]} f'_t dt = f_b - f_a. \tag{2.16}$$

证：任取定义在$\boldsymbol{B}$上的取值于实空间的有界线性泛函F，由定理2.4有

$$F\left((s)\int_{[a,b]} f'_t dt\right) = \int_{[a,b]} F(f'_t) dt. \tag{2.17}$$

((2.17)右端是实变实值函数的Lebesgüe积分。)而

$$F(f'_t) = F\left((s)\lim_{h\to 0}\frac{f_{t+h} - f_t}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} F\left(\frac{f_{t+h} - f_t}{h}\right) = \frac{d}{dt}(F(f_t))$$

在$t\in[a, b]$上是实变实值连续函数，故

$$\int_{[a,b]} F(f'_t) dt = \int_{[a,b]}\frac{d}{dt}(F(f_t)) dt$$

$$= F(f_b) - F(f_a) = F(f_b - f_a).$$

所以，由Hahn—Banach定理有

$$(s)\int_{[a,b]} f'_t dt = f_b - f_a.$$

对于完备测度空间$(R^1, \mathscr{F}^1, \mu^*)$及任意的Banach空间$\boldsymbol{B}$，对于任意抽象函数

$$f_t : S \longrightarrow \mathbf{B}, \qquad (S \in \mathscr{F}^1),$$

我们研究过f_t的强可测性（关于$\mathscr{F}^1$）以及f_t在S上的 Bochner 积分：

$$(s)\int_S f_t \, d\mu^* = (s)\int_S f_t dt.$$

其实，对任意完备测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，任意Banach空间$\mathbf{B}$及任意变换

$$f: \quad \Omega \longrightarrow \mathbf{B},$$

我们亦可仿定义2.2和2.3，定义f关于$\mathscr{F}$的强可测性，以及f在Ω上的Bochner积分

$$(s)\int_\Omega f d\mu.$$

而且关于积分的主要结果在此一般情况下亦成立。当然，若Ω中无拓扑，f的强连续，强导数无法引进。此乃是促使我们研究特殊的完备测度空间$(R^1, \mathscr{F}^1, \mu^*)$上的Bochner积分的主要原因。

§3 无穷小算子

在这一节恒设$\mathbf{T} = [0, \infty)$，$\{F_t : t \in \mathbf{T}\}$是Banach空间$\mathbf{B}$上的压缩型半群。而所考虑的极限、连续、导数都是强极限、强连续、强导数，所考虑的积分都是Bochner积分，（除明显可辨者外）因此，在极限号、积分号…前之(s)都略去不写了，强极限、强连续、强导数之"强"字亦略去。

令

$$\mathbf{B}_0 = \{f : f \in \mathbf{B}, \lim_{t \to 0+} F_t f = f\}.$$

命题3.1 (1) $\mathbf{B}_0$是$\mathbf{B}$的闭线性子空间；

(2) $f \in \mathbf{B}_0 \Rightarrow F_t f$在$\mathbf{T}$上连续.

证：(1) 显然$\mathbf{B}_0$是$\mathbf{B}$的线性子空间，下面证明$\mathbf{B}_0$闭。任取

$f_n \in \mathbf{B}_0$，设 $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$.由于

$$\|F_t f - f\| \leqslant \|F_t(f-f_n)\| + \|F_t f_n - f_n\| + \|f_n - f\|$$
$$\leqslant 2\|f-f_n\| + \|F_t f_n - f_n\|,$$

所以

$$\lim_{t\to 0+}\|F_tf-f\| = 0 .$$

即 $f\in \mathbf{B}_0$。

(2)任取 $t_0>0$

若 $t>t_0$，则 $\|F_tf-F_{t_0}f\| = \|F_{t_0}(F_{t-t_0}f-f)\|\leqslant\|F_{t-t_0}f-f\|$， 而 $f\in\mathbf{B}_0$，所以 $\lim\limits_{t\downarrow t_0}F_tf=F_{t_0}f$。

若 $t<t_0$，则 $\|F_tf-F_{t_0}f\|\leqslant\|F_{t_0-t}f-f\|$，由 $f\in\mathbf{B}_0$ 亦有 $\lim\limits_{t\uparrow t_0}F_tf$ $=F_{t_0}f$。

定义3.1 令

$$\mathscr{D}_A=\left\{f: f\in \mathbf{B}_0, \text{且存在} g\in \mathbf{B}_0, \text{使} g=\lim_{h\to 0+}\frac{E_hf-f}{h}\right\},$$ 在 $\mathscr{D}_A$ 上定义算子 $\mathbf{A}$ 如下：任取 $f\in\mathscr{D}_A$，定义

$$\mathbf{A}f=\lim_{h\to 0+}\frac{F_hf-f}{h},$$

称 $\mathbf{A}$ 为 $\{F_t: t\in\mathbf{T}\}$ 的无穷小算子。

命题3.2 若 $f\in\mathscr{D}_A$，则

$$\frac{d}{dt}(F_tf)=\mathbf{A}\circ F_tf=F_t\circ\mathbf{A}f,\quad (t\in\mathbf{T}),$$

$$F_tf-f=(s)\int_{[0,t]}F_s\circ\mathbf{A}f\,ds,\qquad (t\in\mathbf{T}).$$

证：由 $f\in\mathscr{D}_A$ 得：

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F_{t+h}f-F_tf}{h}=F_t\lim_{h\to 0+}\frac{F_hf-f}{h}=F_t\circ\mathbf{A}f,$$

且 $F_tf\in\mathscr{D}_A$。故

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F_{t+h}f-F_tf}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F_h\circ F_tf-F_tf}{h}=\boldsymbol{A}\circ F_tf.$$

总上所述得到：

$$\frac{d^+}{dt}(F_tf)=\boldsymbol{A}\circ F_tf=F_t\circ\boldsymbol{A}f.\ (t\in\boldsymbol{T}).$$

若$t\in\boldsymbol{T}$，$t>0$．由于

$$\left\|\frac{F_tf-F_{t-h}f}{h}-F_t\circ\boldsymbol{A}f\right\|\leqslant\left\|F_{t-h}\left(\frac{F_hf-f}{h}\right)-F_{t-h}\circ\boldsymbol{A}f\right\|$$

$$+\|F_{t-h}\circ\boldsymbol{A}f-F_t\circ\boldsymbol{A}f\|,$$

$$f\in\mathscr{D}_A,\quad \boldsymbol{A}f\in\boldsymbol{B}_0,$$

所以

$$\lim_{h\to 0+}\left\|\frac{F_tf-F_{t-h}f}{h}-F_t\circ\boldsymbol{A}f\right\|=0.$$

总上两步得$\frac{d}{dt}(F_tf)=F_t\circ\boldsymbol{A}f=\boldsymbol{A}\circ F_tf$，$(t\in\boldsymbol{T})$．

再用定理2.6即得：$F_tf-f=(s)\int_{[0,t]}F_s\circ\boldsymbol{A}fds$．

定理3.1 $\mathscr{D}_A$在$\boldsymbol{B}_0$中稠．

证： 任取$f\in\boldsymbol{B}_0$，则由定理2.5及命题3.1有：

$$f=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}\int_{[0,\tau]}F_tfdt.$$

若能证：对任何$0\leqslant a<b<\infty$，有

$$g(a,\ b)\equiv\int_{[a,b]}F_tfdt\in\mathscr{D}_A,$$

则定理3.1得证．事实上，由定理2.4及2.5得：

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\Big(F_hg(a,\ b)-g(a,\ b)\Big)$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left(\int_{[a,b]}F_h\circ F_tfdt-\int_{[a,b]}F_tfdt\right)$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\Big(\int_{[b,b+h]}F_t f dt-\int_{[a,a+h]}F_t f dt\Big)$$

$$=(F_b f-F_a f)\in \boldsymbol{B}_0.$$

此即$g(a, b)\in \mathscr{D}_A$。

系1 $\mathscr{D}_A^c=\boldsymbol{B}_0$。（$\mathscr{D}_A^c$表$\mathscr{D}_A$之闭包）

证：因为$\boldsymbol{B}_0$是$\boldsymbol{B}$的闭线性子空间，而且$\mathscr{D}_A\subset\boldsymbol{B}_0$，所以$\mathscr{D}_A^c\subset\boldsymbol{B}_0$。而由定理3.1有$\mathscr{D}_A^c\supset\boldsymbol{B}_0$，所以$\mathscr{D}_A^c=\boldsymbol{B}_0$。

定义3.2 固定任一$\lambda>0$，定义算子$R_\lambda:\boldsymbol{B}_0\to\boldsymbol{B}_0$如下：

$$R_\lambda f=\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F_t f dt,\quad (f\in\boldsymbol{B}_0),\tag{3.1}$$

称R_λ是$\{F_t:t\in\boldsymbol{T}\}$的预解算子，$\{R_\lambda:\lambda>0\}$称为$\{F_t:t\in\boldsymbol{T}\}$的预解式。

注意：(1) (3.1)右端的积分是有意义的，因为$f\in\boldsymbol{B}_0$，故$F_t f$在$\boldsymbol{T}$上连续，从而$e^{-\lambda t}F_t f$亦然。又因为

$$\int_{[0,\infty)}\|e^{-\lambda t}F_t f\|dt<\infty,$$

所以，由定理2.3得知$e^{-\lambda t}F_t f$在$[0,\infty)$上是Bochner可积的。

(2) $\{R_\lambda:\lambda>0\}$是一族有界线性算子，而且

$$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{\lambda},\qquad R_\lambda f\in\boldsymbol{B}_0\qquad(\lambda>0,\ f\in\boldsymbol{B}_0).$$

显然R_λ是线性的，而且$R_\lambda f\in\boldsymbol{B}_0$，$(\lambda>0,\ f\in\boldsymbol{B}_0)$。又因为对任何$f\in\boldsymbol{B}_0$，都有

$$\|R_\lambda f\|\leqslant\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}\|f\|dt\leqslant\frac{1}{\lambda}\|f\|,(\lambda>0,\ f\in\boldsymbol{B}_0),$$

所以$\|R_\lambda\|\leqslant\dfrac{1}{\lambda}$。

定理3.2 对任何$\lambda>0$来说，$(\lambda I-\boldsymbol{A})$有逆算子$(\lambda I-\boldsymbol{A})^{-1}$，而且等于$R_\lambda$，($I$是恒等算子)即是说，任取$f\in\boldsymbol{B}_0$，方程式

$$\begin{cases}(\lambda I-\boldsymbol{A})g=f,\\ g\in\mathscr{D}_A\ ,\end{cases}\tag{3.2}$$

有唯一一个解，它就是$R_\lambda f$.

证：(1) $R_\lambda f$是(3.2)的一个解．事实上，令$h_\lambda=R_\lambda f$，则由定理2.4有

$$\mathbf{F}_\tau h_\lambda=\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F_{t+\tau}fdt=\int_{[\tau,\infty)}e^{-\lambda(t-\tau)}F_tfdt$$

$$=e^{\lambda\tau}\Big(h_\lambda-\int_{[0,\tau)}e^{-\lambda t}F_tfdt\Big).$$

因此，由定理2.5有：

$$\lim_{\tau\to0+}\frac{F_\tau h_\lambda-h_\lambda}{\tau}=\lim_{\tau\to0+}\Big(\frac{e^{\lambda\tau}-1}{\tau}h_\lambda-\frac{e^{\lambda\tau}}{\tau}\int_{[0,\tau)}e^{-\lambda t}\mathbf{F}_tfdt\Big)$$

$$=\lambda h_\lambda-f$$

存在且属于$\boldsymbol{B}_0$。此即$h_\lambda\in\mathscr{D}_A$且$\boldsymbol{A}h_\lambda=\lambda h_\lambda-f$.

(2) (3.2)的解是唯一的．设(3.2)有二个解$h_\lambda^{(1)}$、$h_\lambda^{(2)}$．即是$h_\lambda^{(i)}\in\mathscr{D}_A$，　$(\lambda I-\boldsymbol{A})h_\lambda^{(i)}=f,(i=1,\ 2)$．令$\bar{h}_\lambda=h_\lambda^{(1)}-h_\lambda^{(2)}$，则$\bar{h}_\lambda\in\mathscr{D}_A$，且$\boldsymbol{A}\bar{h}_\lambda=\lambda\bar{h}_\lambda$．故由命题3.2有

$$\frac{d}{dt}F_t\bar{h}_\lambda=\mathbf{F}_t\circ\boldsymbol{A}\bar{h}_\lambda=\lambda\mathbf{F}_t\bar{h}_\lambda$$

所以

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}F_t\bar{h}_\lambda)=-\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{F}_t\bar{h}_\lambda+e^{-\lambda t}\Big(\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t\bar{h}_\lambda\Big)$$

$$=-\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{F}_t\bar{h}_\lambda+\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{F}_t\bar{h}_\lambda=0.$$

因此，由定理2.6得：

$$e^{-\lambda t}F_t\bar{h}_\lambda=h_\lambda^*\quad(\text{不依赖}t\in\boldsymbol{T}).\tag{3.3}$$

但是$\bar{h}_\lambda\in\mathscr{D}_A\subset\boldsymbol{B}_0$，所以，由命题3.1得：

$$\lim_{t\to0+}e^{-\lambda t}\mathbf{F}_t\bar{h}_\lambda=\bar{h}_\lambda.\tag{3.4}$$

由(3.3)(3.4)得：

$$e^{-\lambda t}F_t\bar{h}_\lambda=\bar{h}_\lambda,\quad (t\in \boldsymbol{T}).$$

所以

$$\|\bar{h}_\lambda\|=e^{-\lambda t}\|F_t\bar{h}_\lambda\|\leqslant e^{-\lambda t}\|\bar{h}_\lambda\|,\quad (\lambda>0,\ t\in\boldsymbol{T}).$$

故$\|\bar{h}_\lambda\|=0$。唯一性证毕。

定理3.3 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^*$分别为压缩型半群$\{F_t: t\in\boldsymbol{T}\}$和$\{F_t^*: t\in\boldsymbol{T}\}$的无穷小算子，若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$，则

$$F_tf=F_t^*f,\qquad (f\in\boldsymbol{B}_0),$$

其中$\boldsymbol{B}_0=\{f: f\in\boldsymbol{B},\ f=\lim\limits_{t\to0+}F_tf\}=\{f: f\in\boldsymbol{B},\ f=\lim\limits_{t\to0+}F_t^*f\}$。

证：首先注意：由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$，知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^*$的值域一样，从而$(\lambda I-\boldsymbol{A})$与$(\lambda I-\boldsymbol{A}^*)$的值域同，故由定理3.2有$\boldsymbol{B}_0=\{f: f\in\boldsymbol{B}, f=\lim\limits_{t\to0+}F_tf\}=\{f: f\in\boldsymbol{B},\ f=\lim\limits_{t\to0+}F_t^*f\}$，而且

$$\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F_tfdt=\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F_t^*fdt\,(f\in\boldsymbol{B}_0),$$

今任取$\boldsymbol{B}$上的一个有界线性泛函F，由定理2.4有

$$\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F(F_tf)dt=F\Big(\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F_tfdt\Big)$$
$$=F\Big(\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F_t^*fdt\Big)=\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}F(F_t^*f)dt,\ (f\in\boldsymbol{B}_0),$$

而$f\in\boldsymbol{B}_0$时，$F(F_tf)$与$F(F_t^*f)$都是t的实变实值连续函数，所以，由拉氏变换之唯一性得知

$$F(F_tf)=F(F_t^*f),\,(t\in\boldsymbol{T},\ f\in\boldsymbol{B}_0).$$

因此，仿定理2.6，用*Hahn-Banach*定理得知

$$F_tf=F_t^*f\quad,\ (f\in\boldsymbol{B}_0).$$

上面我们从半群出发，研究了其无穷小算子的性质。下面我们考虑它的逆问题，即什么样的算子$\boldsymbol{A}$，可以作为某一个半群的无穷小算子？

设$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$是两个*Banach*空间，$\mathscr{L}^*(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2)$是由$\boldsymbol{B}_1$到

$\boldsymbol{B}_2$的全体有界线性算子构成的 Banach 空间.(其中范数按算子范数定义，其线性运算按普通的算子的线性运算定义.)若$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}$，则简记$\mathscr{L}^*(\boldsymbol{B}_1，\boldsymbol{B}_2)$为$\mathscr{L}^*$.

若$\Psi\in\mathscr{L}^*$，定义

$$e^{\Psi}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Psi^m}{m!}=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{\Psi^m}{m!}\quad,\tag{3.5}$$

(此处收敛性是指按$\mathscr{L}^*$中的范数的收敛性)，$\Psi^m=\underbrace{\Psi\circ\Psi\circ\cdots\circ\Psi}_{m个}$

是Ψ的m重复合算子.

注意：(3.5)右边的极限是存在的. 事实上，

$$\left\|\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\frac{\Psi^m}{m!}\right\|\leqslant\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\frac{\|\Psi^m\|}{m!}\leqslant\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\frac{(\|\Psi\|)^m}{m!},$$

所以

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}}\left\|\sum_{m=N_1+1}^{N_2}\frac{\Psi^m}{m!}\right\|=0.$$

由$\mathscr{L}^*$的完备性得知存在$\Psi_0\in\mathscr{L}^*$，使

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{\Psi^m}{m!}=\Psi_0.$$

命题3.3 (1) $\Psi\in\mathscr{L}^*\Rightarrow\|e^{\Psi}\|\leqslant e^{\|\Psi\|}$;

(2) $\Psi_{m,n}\in\mathscr{L}^*$，$\sum_m\sum_n\|\Psi_{m,n}\|<\infty$，$\sum_m\sum_n\Psi_{m,n}=\Psi\in\mathscr{L}^*$，$\sum_n\sum_m\Psi_{m,n}=\Phi\in\mathscr{L}^*\Rightarrow\Psi=\Phi$;

(3) Ψ，$\Phi\in\mathscr{L}^*$，$\Psi\circ\Phi=\Phi\circ\Psi$，$\Rightarrow e^{\Psi+\Phi}=e^{\Psi}\circ e^{\Phi}=e^{\Phi}\circ e^{\Psi}$;

(4) $\Psi\in\mathscr{L}^*\Rightarrow\dfrac{d}{dt}e^{t\Psi}=\Psi\circ e^{t\Psi}=e^{t\Psi}\circ\Psi$.

证：(1) $\|e^{\Psi}\|=\lim\limits_{N\to\infty}\left\|\sum\limits_{m=0}^{N}\dfrac{\Psi^m}{m!}\right\|\leqslant\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{N}\dfrac{\|\Psi^m\|}{m!}\leqslant\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{N}\dfrac{\|\Psi\|^m}{m!}$

$= e^{\|\Psi\|}$.

(2) 任取$\mathscr{L}^*$上一个有界线性泛函F，有

$$F(\Psi) = \sum_m \sum_n F(\Psi_{m,n}), \quad F(\Phi) = \sum_n \sum_m F(\Psi_{m,n}).$$

但是

$$|F(\Psi_{m,n})| \leqslant \|F\| \|\Psi_{m,n}\|,$$

所以

$$\sum_m \sum_n |F(\Psi_{m,n})| \leqslant \|F\| \sum_m \sum_n \|\Psi_{m,n}\| < \infty,$$

因此，

$$F(\Psi) = \sum_m \sum_n F(\Psi_{m,n}) = \sum_n \sum_m F(\Psi_{m,n}) = F(\Phi),$$

从而由Hahn—Banach定理得$\Psi = \Phi$。

(3) 由Ψ，$\Phi \in \mathscr{L}^*$，$\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi$可得：

$$e^{\Psi + \Phi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} C_m^l \frac{\Psi^l \circ \Phi^{m-l}}{m!},$$

(C_m^l是m个元素中取l个的组合数)，

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} C_m^l \frac{\Psi^l \circ \Phi^{m-l}}{m!} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+l}^l \frac{\Psi^l \circ \Phi^n}{(n+l)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \Psi^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^n}{n!\,l!} = e^{\Psi} \circ e^{\Psi}.$$

又因为

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} C_m^l \left\| \frac{\Psi^l \circ \Phi^{m-l}}{m!} \right\|$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} C_m^l \frac{\|\Psi\|^l \|\Phi\|^{m-l}}{m!} = e^{\|\Psi\| + \|\Phi\|} < \infty,$$

所以，由(2)有

$$e^{\Psi+\Phi}=e^{\Psi}\circ e^{\Phi}.$$

由 Ψ、Φ地位的对称性，故亦有

$$e^{\Psi+\Phi}=e^{\Phi}\circ e^{\Psi}.$$

(4) 由(1)及(3)有：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{(t+\Delta t)\Psi}-e^{t\Psi}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}e^{t\Psi}\circ\left(\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}\right)$$

$$=e^{t\Psi}\circ\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}\right).$$

又因为

$$\left\|\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}-\Psi\right\|\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\|(\Delta t\Psi)^m\|}{m!\Delta t}$$

$$\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}(\Delta t)^{m-1}\frac{\|\Psi\|^m}{m!},$$

故

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t\Psi}-I}{\Delta t}=\Psi.$$

至此，命题3.3得证。

定理3.4 设$\boldsymbol{B}_0$是Banach空间$\boldsymbol{B}$的一个闭线性子空间，$\boldsymbol{A}$是定义在$\mathscr{D}_A\subset\boldsymbol{B}_0$上的取值于$\boldsymbol{B}_0$的线性算子。如果

(1) $\mathscr{D}_A$在$\boldsymbol{B}_0$中稠；

(2) 对任何 $f\in\boldsymbol{B}_0$，方程式

$$\begin{cases}(\lambda I-\boldsymbol{A})g=f,\\ g\in\mathscr{D}_A\end{cases}$$

恰有唯一一个解，(从而可以令$R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$，$R_\lambda$：$\boldsymbol{B}_0\to\mathscr{D}_A$)；

(3) $\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$，($\lambda>0$)，

则在$\boldsymbol{B}_0$上存在唯一一个强连续的压缩型的半群$\{F_t: t\in T\}$使其

无穷小算子就是$\boldsymbol{A}$。

证：由于$tn\boldsymbol{A}\circ R_n = tn^2R_n - tnI$是有界线性算子，所以

$$e^{tn\boldsymbol{A}\circ R_n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tn\boldsymbol{A}\circ R_n)^m}{m!}$$

有定义。再定义一族算子$F_t^{(n)}$：$\boldsymbol{B}_0 \to \boldsymbol{B}_0$ 如下：

$$F_t^{(n)} f = e^{tn\boldsymbol{A}\circ R_n} f \qquad (f \in \boldsymbol{B}_0)。$$

(I) 对任何$n \geqslant 1$，可证 $\{F_t^{(n)},\ t \in \boldsymbol{T}\}$是$\boldsymbol{B}_0$上的强连续压缩型半群。

显然，$F_t^{(n)}$是有界线性算子。由命题3.3及条件(3)有：

$$\|e^{tn\boldsymbol{A}\circ R_n}\| = \|e^{tn^2R_n - tnI}\| = \|e^{-tn}e^{tn^2R_n}\|$$

$$\leqslant e^{-tn}e^{\|tn^2R_n\|} \leqslant e^{-tn}\cdot e^{tn} = 1。$$

至于 $F_{s+t}^{(n)} = F_s^{(n)}\circ F_t^{(n)} = F_t^{(n)}\circ F_s^{(n)}$，$F_0^{(n)} = I$，由命题 3.3(3)立即可得。此即 $\{F_t^{(n)},\ t \in \boldsymbol{T}\}$是压缩型半群。再任取 $f \in \boldsymbol{B}_0$，仿命题3.3(4)的证明有（因为$n\boldsymbol{A}\circ R_n$是有界线性算子）：$F_t^{(n)} f$对t来说有强导数(在$t \in \boldsymbol{T}$)，从而对t更是强连续的。

(II) 任取$f \in \boldsymbol{B}_0$，$t \in \boldsymbol{T}$，往证：

$$\lim_{n\to\infty} F_t^{(n)} f$$

存在且属于$\boldsymbol{B}_0$，记此极限为$F_t f$。

事实上，由于 $\|F_t^{(n)}\| \leqslant 1$，$(n \geqslant 1,\ t \in \boldsymbol{T})$，$\mathscr{D}_A$在 $\boldsymbol{B}_0$中稠，所以，若能证：对任何 $\tilde{f} \in \mathscr{D}_A$，均有$\tilde{g}_t \in \boldsymbol{B}_0$，使

$$\tilde{g}_t = \lim_{n\to\infty} F_t^{(n)} \tilde{f}, \quad (t \in \boldsymbol{T}), \tag{3.6}$$

则对任何$f \in \boldsymbol{B}_0$，可取$\tilde{f}_K \in \mathscr{D}_A$，$f = \lim\limits_{K\to\infty} \tilde{f}_K$。因此，由

$$\|F_t^{(n)} f - F_t^{(m)} f\| \leqslant \|F_t^{(n)} f - F_t^{(n)} \tilde{f}_K\| + \|F_t^{(n)} \tilde{f}_K - F_t^{(m)} \tilde{f}_K\|$$

$$+ \|F_t^{(m)} \tilde{f}_K - F_t^{(m)} f\|$$

$$\leqslant 2\|\tilde{f}_K - f\| + \|F_t^{(n)} \tilde{f}_K - F_t^{(m)} \tilde{f}_K\|$$

及(3.6)可得：

$$\lim_{m,n\to\infty} \|F_t^{(n)} f - F_t^{(m)} f\| = 0。$$

因此，由$\boldsymbol{B}_0$的完备性知必有$g_t\in\boldsymbol{B}_0$，使

$$g_t=\lim_{n\to\infty}F_t^{(n)}f.$$

下面我们补证(3.6)。

今任取$\tilde{f}\in\mathscr{D}_A$，由命题3.3有

$$\frac{d}{dt}(F_t^{(n)}\tilde{f})=\frac{d}{dt}(e^{tn\boldsymbol{A}\circ R_n}\tilde{f})$$

$$=F_t^{(n)}(n\boldsymbol{A}\circ R_n\tilde{f})=n\boldsymbol{A}\circ R_n\circ F_t^{(n)}\tilde{f}. \tag{3.7}$$

所以用(I)及(3.7)有：

$$\frac{d}{ds}(F_{t-s}^{(n)}\circ F_s^{(m)}\tilde{f})=\lim_{\triangle s\to 0}\frac{F_{t-s-\triangle s}^{(n)}\circ F_{s+\triangle s}^{(m)}\tilde{f}-F_{t-s}^{(n)}\circ F_s^{(m)}\tilde{f}}{\triangle s}$$

$$=\lim_{\triangle s\to 0}\left(\frac{F_{t-s-\triangle s}^{(n)}(F_{s+\triangle s}^{(m)}\tilde{f}-F_s^{(m)}\tilde{f})}{\triangle s}\right.$$

$$\left.+\frac{(F_{t-s-\triangle s}^{(n)}-F_{t-s}^{(n)})\circ F_s^{(m)}\tilde{f}}{\triangle s}\right)$$

$$=F_{t-s}^{(n)}\left(\frac{d}{ds}F_s^{(m)}\tilde{f}\right)-\frac{d}{dt}F_{t-s}^{(n)}(F_s^{(m)}\tilde{f})$$

$$=F_{t-s}^{(n)}(m\boldsymbol{A}\circ R_m\circ F_s^{(m)}\tilde{f})-F_{t-s}^{(n)}(n\boldsymbol{A}\circ R_n\circ F_s^{(m)}\tilde{f})$$

$$=F_{t-s}^{(n)}\circ(m\boldsymbol{A}\circ R_m\circ F_s^{(m)}-n\boldsymbol{A}\circ R_n\circ F_s^{(m)})\tilde{f}. \tag{3.8}$$

由(3.7)和(3.8)知$\frac{d}{dt}(F_t^{(n)}\tilde{f})$ 对 $t\in\boldsymbol{T}$是强连续的，$\frac{d}{ds}(F_{t-s}^{(n)}\circ F_s^{(m)}\tilde{f})$ 对 $s\in[0,t]$是强连续的。所以，由定理2.6有：

$$F_t^{(m)}\tilde{f}-F_t^{(n)}\tilde{f}=\int_{[0,t]}\left[\frac{d}{ds}(F_{t-s}^{(n)}\circ F_s^{(m)}\tilde{f})\right]ds$$

$$=\int_{[0,t]}F_{t-s}^{(n)}\circ(m\boldsymbol{A}\circ R_m\circ F_s^{(m)}-n\boldsymbol{A}\circ R_n\circ F_s^{(m)})\tilde{f}\;ds. \tag{3.9}$$

由 $(nI-\boldsymbol{A})\circ(mI-\boldsymbol{A})=(mI-\boldsymbol{A})\circ(nI-\boldsymbol{A})$得 $R_n\circ R_m=R_m\circ R_n$，又因为

$$\boldsymbol{A}\circ R_m=mR_m-I,$$

$$F_t^{(n)}=e^{ntA\circ R_n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(nt\boldsymbol{A}\circ R_n)^k,$$

所以

$\boldsymbol{A}\circ R_m\circ F_t^{(n)}=F_t^{(n)}\circ\boldsymbol{A}\circ R_m$，(不论$m$是否等于$n$)，以此代入(3.9)得：

$$F_t^{(m)}\bar{f}-F_t^{(n)}\bar{f}=\int_{[0,t]}F_{t-s}^{(n)}\circ F_s^{(m)}\circ(m\boldsymbol{A}\circ R_m-n\boldsymbol{A}\circ R_n)\bar{f}ds. \tag{3.10}$$

又因为对任何$g\in\mathscr{D}_A$，有

$$R_n\circ(nI-\boldsymbol{A})g=g,\quad \lim_{n\to\infty}R_n\circ\boldsymbol{A}g=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}nR_ng=g,\quad(g\in\mathscr{D}_A). \tag{3.11}$$

而$\|nR_n\|\leqslant 1$，$\mathscr{D}_A$在$\boldsymbol{B}_0$中稠，仿前可证：

$$\lim_{n\to\infty}nR_ng=g,\quad(g\in\boldsymbol{B}_0). \tag{3.12}$$

但是$\bar{f}\in\mathscr{D}_A$，故

$$R_n\circ\boldsymbol{A}\bar{f}=\boldsymbol{A}\circ R_n\bar{f}. \tag{3.13}$$

显然$\boldsymbol{A}\bar{f}\in\boldsymbol{B}_0$，所以由(3.12)、(3.13)得：

$$\lim_{n\to\infty}n\boldsymbol{A}\circ R_n\bar{f}=\lim_{n\to\infty}nR_n\circ\boldsymbol{A}\bar{f}=\boldsymbol{A}\bar{f}. \tag{3.14}$$

由(3.10)、(3.13)、(3.14) 得：

$$\begin{aligned}&\limsup_{m,n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq M}\|F_t^{(m)}\bar{f}-F_t^{(n)}\bar{f}\|\\ &\leqslant\limsup_{m,n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq M}\int_{[0,t]}\|F_{t-s}^{(n)}\circ F_s^{(m)}\circ(m\boldsymbol{A}\circ R_m-n\boldsymbol{A}\circ R_n)\bar{f}\|ds\\ &\leqslant\limsup_{m,n\to\infty}M\|(m\boldsymbol{A}\circ R_m-n\boldsymbol{A}\circ R_n)\|\\ &=\limsup_{m,n\to\infty}M\|(mR_m-nR_n)\circ\boldsymbol{A}\bar{f}\|=0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

但是$\boldsymbol{B}_0$是闭的，所以对任何$\bar{f}\in\mathscr{D}_A$存在$\bar{g}_t\in\boldsymbol{B}_0$，使

$$\lim_{n\to\infty}F_t^{(n)}\bar{f}=\bar{g}_t\ (\text{在}t\text{属于任何有限区间上一致}). \tag{3.16}$$

(3.6)得证。

(III) 往证 $\{F_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是强连续的压缩型半群。显然$F_t$是有界线性算子，而且$\|F_t\|\leqslant 1$，$(t\in\boldsymbol{T})$。因为$\{F_t^{(n)}: t\in\boldsymbol{T}\}$是强连续的压缩型半群，所以，由(3.16)得知对任何$\bar{f}\in\mathscr{D}_A$，$F_t\bar{f}$ 在$t\in\boldsymbol{T}$是强连续的。再利用$\|F_t\|\leqslant 1$，$(t\in\boldsymbol{T})$及 $\mathscr{D}_A$在$\boldsymbol{B}_0$中稠易证：对任何$f\in\boldsymbol{B}_0$，$F_t f$ 在$t\in\boldsymbol{T}$上也强连续。

又因为对任何$f\in\boldsymbol{B}_0$，有

$$F_{s+t}f=\lim_{n\to\infty}F_s^{(n)}\circ F_t^{(n)}f,$$

$$\begin{aligned}\|F_s\circ F_t f-F_s^{(n)}\circ F_t^{(n)}f\|&\leqslant\|F_s\circ F_t f-F_s^{(n)}\circ F_t f\|\\&\quad+\|F_s^{(n)}\circ F_t f-F_s^{(n)}\circ F_t^{(n)}f\|\\&\leqslant\|F_s\circ F_t f-F_s^{(n)}\circ F_t f\|+\|F_t f-F_t^{(n)}f\|,\end{aligned}$$

所以

$$F_{s+t}f=\lim_{n\to\infty}F_s^{(n)}\circ F_t^{(n)}f=F_s\circ F_t f.$$

而$F_0=I$显然，故$\{F_t: t\in\boldsymbol{T}\}$是强连续压缩型半群。

(IV) $\{F_t: t\in\boldsymbol{T}\}$ 的无穷小算子 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$。

任取$f\in\mathscr{D}_A$，由$\boldsymbol{A}\circ R_n f=R_n\circ\boldsymbol{A}f$ 得：

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{[0,t]}nF_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}\circ R_n f\,ds-\int_{[0,t]}F_s\circ\boldsymbol{A}f\,ds\right\|\\&\leqslant\int_{[0,t]}\|nF_s^{(n)}\circ R_n\circ\boldsymbol{A}f-F_s\circ\boldsymbol{A}f\|ds\\&\leqslant\int_{[0,t]}\|nF_s^{(n)}\circ R_n\circ\boldsymbol{A}f-F_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}f\|ds\\&\quad+\int_{[0,t]}\|F_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}f-F_s\circ\boldsymbol{A}f\|ds\\&\leqslant t\,\|nR_n\circ\boldsymbol{A}f-\boldsymbol{A}f\|+\int_{[0,t]}\|F_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}f-F_s\circ\boldsymbol{A}f\|ds.\end{aligned}\tag{3.17}$$

在(3.17)中令$n\to\infty$并注意(3.12)及对任何$g\in\boldsymbol{B}_0$有

$\lim\limits_{n\to\infty}F_t^{(n)}g=F_t g$，(在$t$属于任何有限区间上一致)，

((3.16)中已证当$g\in\mathscr{D}_A$时上式成立，而今$\mathscr{D}_A$在$\boldsymbol{B}_0$中稠，且$F_t^{(n)}$、F_t是有界线性算子，范数均≤1，所以上式对一切$g\in\boldsymbol{B}_0$亦成立。)则可得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,t]} nF_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}\circ R_n f\,ds=\int_{[0,t]} F_s\circ\boldsymbol{A}f\,ds. \quad (3.18)$$

但是，由(3.7)有

$$\int_{[0,t]} nF_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}\circ R_n f\,ds=\int_{[0,t]}\left(\frac{d}{ds}F_s^{(n)}f\right)ds=F_t^{(n)}f-f. \quad (3.19)$$

由(3.18)、(3.19)及定理2.5得：

$$\lim_{t\to0+}\frac{F_tf-f}{t}=\lim_{t\to0+}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\int_{[0,t]} nF_s^{(n)}\circ\boldsymbol{A}\circ R_n f\,ds$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}\int_{[0,t]} F_s\circ\boldsymbol{A}f\,ds=\boldsymbol{A}f. \quad (3.20)$$

这就证明了$\boldsymbol{A}^*\supset\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$之开拓。下面我们再证明$\boldsymbol{A}^*\subset\boldsymbol{A}$。即任取$g^*\in\mathscr{D}_{A^*}$($\mathscr{D}_{A^*}$是$\boldsymbol{A}^*$之定义域)，往证$g^*\in\mathscr{D}_A$，且$\boldsymbol{A}^*g^*=\boldsymbol{A}g^*$，为此，若注意$\boldsymbol{A}^*\supset\boldsymbol{A}$，又只须证明$g^*\in\mathscr{D}_A$。事实上，必存在$f^*\in\boldsymbol{B}_0$，使

$$(\lambda I-\boldsymbol{A}^*)g^*=f^*.$$

再用本定理假设(2)有唯一一个$g\in\mathscr{D}_A$，使

$$(\lambda I-\boldsymbol{A})g=f^*.$$

由$\boldsymbol{A}^*\supset\boldsymbol{A}$得$f^*=(\lambda I-\boldsymbol{A}^*)g$，$g\in\mathscr{D}_A\subset\mathscr{D}_{A^*}$，而由定理3.2得知

$$\begin{cases}(\lambda I-\boldsymbol{A}^*)h=f^*\\ h\in\mathscr{D}_{A^*}\end{cases}$$

恰有唯一一个解，所以$g^*=g\in\mathscr{D}_A$。这就证明了$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$。

(V) 由定理3.3立即可得：恰有唯一一个强连续的压缩型的半群$\{F_t: t\in\boldsymbol{T}\}$，使其无穷小算子就是$\boldsymbol{A}$。

定理3.5 设$\boldsymbol{B}_0$是Banach空间$\boldsymbol{B}$的一个闭线性子空间，$\mathscr{D}_A\subset\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{A}$：$\mathscr{D}_A\longrightarrow\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{A}$是线性算子，则$\boldsymbol{A}$决定唯一一个$\boldsymbol{B}_0$

上的强连续的压缩型半群，使其无穷小算子就是$\boldsymbol{A}$的充要条件是：

(1) $\mathscr{D}_A$在$\boldsymbol{B}_0$中稠；

(2) 任取$f\in\boldsymbol{B}_0$，方程式

$$\begin{cases}(\lambda I-\boldsymbol{A})g=f, & (\lambda>0)\\ g\in\mathscr{D}_A\end{cases}$$

恰有唯一一个解，记此解为 $(\lambda I-\boldsymbol{A})^{-1}f$或$R_\lambda f$；

(3) R_λ是有界线性算子，且$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$，$(\lambda>0)$。

证：这是前面四个定理的总结。

定理3.6 设$\boldsymbol{A}$、R_λ分别为$\boldsymbol{B}$上的压缩型半群$\{F_t:t\in\boldsymbol{T}\}$的无穷小算子与预解算子，$\boldsymbol{B}_0$如命题3.1前所定义，则对任何$f\in\boldsymbol{B}_0$，恒有

$$F_tf=\lim_{n\to\infty}e^{tnA\circ R_n}f=\lim_{n\to\infty}e^{tn(nR_n-I)}f,\quad(t\in\boldsymbol{T}).$$

证：定理3.4中已证明此事实.

§4 准转移函数与半群的关系

本节恒设$\boldsymbol{T}=[0,\infty)$或$\{0, 1, 2, \cdots\}$，$(E,\mathscr{E})$是任一可测空间，$P(t,x,A)$是准转移函数（$P(0, x, A)$仍定义为$I_A(x)$），$\mathscr{M}$、$\mathscr{L}$是§1中所定义的两个Banach空间. 在§1中，我们分别在$\mathscr{M}$和$\mathscr{L}$上引进了两个半群$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$、$\{V_t:t\in\boldsymbol{T}\}$如下：

$$(P_tf)(x)=\int_E P(t, x, dy)f(y),(t\in\boldsymbol{T},x\in E,f\in\mathscr{M}),\tag{4.1}$$

$$(V_t\varphi)(A)=\int_E\varphi(dx)P(t,x,A),\ (t\in\boldsymbol{T},A\in\mathscr{E},\varphi\in\mathscr{L}).\tag{4.2}$$

关于半群$\{P_t\}$与$\{V_t\}$，在§1中我们曾经看到，它们是相互

唯一决定的。在这一节中，我们将要研究准转移函数$P(t, x, A)$与半群$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$（或$\{V_t: t\in \boldsymbol{T}\}$）的关系。

定义4.1 称Banach空间$\mathscr{M}$上的半群$\{F_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是正半群，如果$f\in\mathscr{M}$，$f\geqslant 0 \Longrightarrow F_t f\geqslant 0$，$(t\in \boldsymbol{T})$。

定理4.1 设$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是$\mathscr{M}$上的任一压缩型半群，则它决定唯一一个准转移函数$P(t, x, A)$使(4.1)成立的充要条件是：

(1) $\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是正半群；

(2) 对任何$f_n\in\mathscr{M}$，$\sup\limits_n\|f_n\|<\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$（一切$x\in E$），均有

$$\lim_{n\to\infty}(P_t f_n)(x)=0,\quad (x\in E,\ t\in \boldsymbol{T}).$$

证： 必要性 设$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是$\mathscr{M}$上一个压缩型半群，它决定一个准转移函数$P(t, x, A)$满足(4.1)，则(1)显然成立。至于(2)，也只须应用控制收敛定理立即可以得到。

充分性 设$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是一个满足(1)和(2)的半群，令

$$P(t, x, A)=(P_t I_A)(x),\quad (t\in \boldsymbol{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$

往证$P(t, x, A)$即为所求。事实上，由于$I_A\in\mathscr{M}$，$P_t:\mathscr{M}\to\mathscr{M}$，所以任意固定$t\in \boldsymbol{T}$，$A\in\mathscr{E}$，$P(t, \cdot, A)\in\mathscr{M}$，而由$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是压缩型正半群可得$0\leqslant P(t, x, A)\leqslant 1$ $(t\in \boldsymbol{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$。由$P_t$是线性算子，可知$P(t, x, \cdot)$在$\mathscr{E}$上具有有限可加性。再设$A_n\in\mathscr{E}$，$\{A_n\}$不交，$A=\bigcup\limits_n A_n$，$f_n=\sum\limits_{i=1}^{n} I_{A_i}$，$f=I_A$，则$\|f_n\|\leqslant 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。因此，由定理假设有

$$P(t,x,A)=(P_t f)(x)=\lim_{n\to\infty}(P_t f_n)(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(P_t I_{A_i})(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P(t,x,A_i).$$

这就证明了$P(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度。显然$f=I_A$ $(A\in\mathscr{E})$时

(4.1)成立，用单调类定理（参见[20]，第0章(2.3)）可证对一切 $f\in b\mathscr{E}=\mathscr{M}$ 时（4.1）亦成立。由$\{P_t: t\in\boldsymbol{T}\}$的半群性质及（4.1）立即可得：

$$P(s+t,\ x,\ A)=(P_{s+t}I_A)(x)=(P_s\circ P_tI_A)(x)$$
$$=\int_E P(s,\ x,\ dy)P(t,y,A),\ (s,\ t\in\boldsymbol{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

定理证毕。

定义4.2 设$\boldsymbol{T}=[0,\infty)$，称准转移函数$P(t,\ x,\ A)$是可测的，如果固定任意$A\in\mathscr{E}$，$(t,\ x)\longrightarrow P(t,\ x,\ A)$是$\mathscr{B}^0_\infty\times\mathscr{E}$可测的，（$\mathscr{B}^0_\infty$是$[0,\infty)$的Borel集合体）。

对可测准转移函数$P(t,\ x,\ A)$，定义其拉氏变换：

$$\Psi(\lambda,x,\ A)=\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t}P(t,\ x,\ A)dt,\ (\lambda>0,\ x\in E,$$
$$A\in\mathscr{E}). \tag{4.3}$$

再定义二族由$\mathscr{M}$到$\mathscr{M}$和由$\mathscr{L}$到$\mathscr{L}$的算子：

$$(\Psi_\lambda f)(x)=\int_E\Psi(\lambda,x,dy)f(y),(\lambda>0,\ x\in E,\ \ f\in\mathscr{M});$$

$$(\Psi_\lambda^*\varphi)(A)=\int_E\varphi(dx)\Psi(\lambda,x,A),\ (\lambda>0,\ A\in\mathscr{E},$$
$$\varphi\in\mathscr{L}).$$

称$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$（$\{\Psi_\lambda^*:\lambda>0\}$）为$\{P_t: t\in\boldsymbol{T}\}$（$\{V_t: t\in\boldsymbol{T}\}$）的位势算子，而$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$与$\{\Psi_\lambda^*:\lambda>0\}$都称为$P(t,x,A)$的位势算子。

命题4.1 设$P(t,x,A)$是可测的准转移函数，$\Psi(\lambda,x,A)$是其拉氏变换，$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$、$\{R_\lambda:\lambda>0\}$是$\{P_t: t\in\boldsymbol{T}\}$的位势算子与预解式，$\{\Psi_\lambda^*:\lambda>0\}$、$\{R_\lambda^*:\lambda>0\}$是$\{V_t: t\in\boldsymbol{T}\}$的位势算子与预解式，则

(1) $\Psi(\lambda,x,A)$具有下列诸性质：

固定$\lambda>0$，$A\in\mathscr{E}$，$\Psi(\lambda,\cdot,A)\in b\mathscr{E}$；固定$\lambda>0$，$x\in E$，$\Psi(\lambda,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度；$0\leqslant\lambda\Psi(\lambda,x,A)\leqslant1$，$(\lambda>0,\ x\in E,$

$A\in\mathscr{E}$)，且满足预解方程式：

$$\Psi(\lambda,x,A)-\Psi(\mu,x,A)+(\lambda-\mu)\int_E\Psi(\lambda,x,dy)\Psi(\mu,y,A)=0 \tag{4.4}$$

$(\lambda>0,\ \mu>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$。

(2) $\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$、$\{\Psi_\lambda^*:\lambda>0\}$、$\{R_\lambda:\lambda>0\}$、$\{R_\lambda^*:\lambda>0\}$ 亦满足预解方程式：

$$\Psi_\lambda f-\Psi_\mu f+(\lambda-\mu)\Psi_\lambda\circ\Psi_\mu f=0,\ (\lambda,\ \mu>0,\ f\in\mathscr{M}),$$

$$\Psi_\lambda^*\varphi-\Psi_\mu^*\varphi+(\lambda-\mu)\Psi_\lambda^*\circ\Psi_\mu^*\varphi=0,\ (\lambda,\mu>0,\ \ \varphi\in\mathscr{L}),$$

$$R_\lambda f-R_\mu f+(\lambda-\mu)R_\lambda\circ R_\mu f=0,\ (\lambda,\mu>0,\ \ f\in\mathscr{M}_0),$$

$$R_\lambda^*\varphi-R_\mu^*\varphi+(\lambda-\mu)R_\lambda^*\circ R_\mu^*\varphi=0,\ (\lambda,\mu>0,\ \varphi\in\mathscr{L}_0),$$

其中 $\mathscr{M}_0=\{f:f\in\mathscr{M},\ (s)\lim\limits_{t\to0+}P_tf=f\}$，

$\mathscr{L}_0=\{\varphi:\varphi\in\mathscr{L},\ (s)\lim\limits_{t\to0+}V_t\varphi=\varphi\}$。

(3) $\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$、$\{\Psi_\lambda^*:\lambda>0\}$ 皆为有界线性算子族，$\|\Psi_\lambda\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$，$\|\Psi_\lambda^*\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$，$\Psi_\lambda\supset R_\lambda$，即$\Psi_\lambda$是$R_\lambda$之开拓，$\Psi_\lambda^*\supset R_\lambda^*$。

证：只验证预解方程式 (4.4) 及$\Psi_\lambda\supset R_\lambda$，其它均为显然。不妨令$\lambda\neq\mu$。

$$\begin{aligned}
&\int_E\Psi(\lambda,x,dy)\Psi(\mu,y,A)\\
&=\int_E\Psi(\lambda,x,dy)\left(\int_{[0,\infty)}e^{-\mu t}P(t,y,A)dt\right)\\
&=\int_{[0,\infty)}ds\int_{[0,\infty)}dt\int_E e^{-\lambda s-\mu t}P(s,x,dy)P(t,y,A)\\
&=\int_{[0,\infty)}ds\int_{[s,\infty)}dt(e^{-\lambda s}e^{-\mu(t-s)}P(t,x,A))\\
&=\int_{[0,\infty)}dt\int_{[0,t]}ds(e^{-(\lambda-\mu)s}e^{-\mu t}P(t,x,A))\\
&=\frac{1}{\mu-\lambda}\int_{[0,\infty)}(e^{-(\lambda-\mu)t}-1)e^{-\mu t}P(t,x,A)dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}(\Psi(\lambda, x, A) - \Psi(\mu, x, A)),$$

再证$R_\lambda \subset \Psi_\lambda$。

任取$f \in \mathscr{M}_0$，由$e^{-\lambda t}p_t f$在$t \in \boldsymbol{T}$强连续（从而必强可测）得知存在一串简单抽象函数$\{u_t^{(n)}: n \geq 1\}$使

$$e^{-\lambda t}p_t f = (s)\lim_{n\to\infty} u_t^{(n)}, \ [a.e.]in\boldsymbol{T}, \ (\mu^*)$$

$$u_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{K_n} C_i^{(n)} I_{A_{n,i}}(t), C_i^{(n)} \in \mathscr{M}, \{A_{n,i}: i = 1, \cdots, K_n\}$$

不交，$\bigcup_{i=1}^{K_n} A_{n,i} = [0, \infty), \|u_t^{(n)}\| \leq 2\|e^{-\lambda t}p_t f\|$。

所以

$$R_\lambda f = (s)\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t}p_t f dt = (s)\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{K_n} C_i^{(n)}\mu^*(A_{n,i}),$$

（μ^*是直线上的Lebesgue测度）。

更有

$$(R_\lambda f)(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{K_n} C_i^{(n)}(x)\mu^*(A_{n,i})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} u_t^{(n)}(x)dt = \int_{[0,\infty)} (e^{-\lambda t}p_t f)(x)dt$$

$$= (\Psi_\lambda f)(x).$$

命题证毕。

§5 准转移函数的连续性

本节设 $\boldsymbol{T} = [0, \infty)$，$(E, \mathscr{E})$ 是任一可测空间，对角线集 $D = \{(x,x): x \in E\} \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$，从而$\mathscr{E}$包含了$E$中全体单点集，$\mathrm{P}(t, x, A)$是准转移函数。

定义5.1 称准转移函数$P(t,x,A)$是标准的，如果

$$\lim_{t\to 0+} P(t,x,A)=P(0,x,A)=I_A(x),\quad (x\in E,\quad A\in \mathscr{E},) \tag{5.1}$$

定理5.1 若$P(t,x,A)$是标准的，则

(1) $P(t,x,\{x\})>0$，$(t\in \boldsymbol{T},\ x\in E)$；

(2) $|P(t,x,A)-P(u,x,A)|$

$\leqslant 1-P(|t-u|,\ x,\ \{x\}),(t,u\in \boldsymbol{T},\ x\in E,\ A\in \mathscr{E})$，

从而对每一个固定的$x\in E$，$A\in \mathscr{E}$，$P(\cdot,x,A)$作为t的函数来说，在$\boldsymbol{T}$上一致连续，而且对$A\in \mathscr{E}$而言是等度的；

(3) 对每个固定的$t\in \boldsymbol{T}$，$h(x)=P(t,x,B_x)$ 是x的$\mathscr{E}$可测函数，其中$B\in \mathscr{E}\times\mathscr{E}$，$B_x=\{y:(x,y)\in B\}$。特别地，$P(t,x,\{x\})$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数。

证： (1) 因为对任何u，$v\in \boldsymbol{T}$，有

$$P(u+v,x,A)=\int P(u,x,dy)P(v,y,A)\geqslant P(u,x,\{x\})\cdot P(v,x,A),$$

更有

$$P(t,x,\{x\})\geqslant \left[P\left(\frac{t}{2^n},x,\{x\}\right)\right]^{2^n}.$$

故由$\lim\limits_{t\to 0+}P(t,x,\{x\})=1$ 即得(1)。

(2) 不失普遍性，可令$t\geqslant u$。令$t=u+v$，则

$$P(t,x,A)-P(u,x,A)=\int_E P(v,\ x,\ dy)P(u,y,A)$$
$$-P(u,x,A)=\int_{E-\{x\}} P(v,x,dy)P(u,y,A)$$
$$-P(u,x,A)(1-P(v,x,\{x\})).$$

所以

$$P(t,x,A)-P(u,x,A)\geqslant -(1-P(v,x,\{x\})). \tag{5.2}$$

又因为

$$P(t,x,A)-P(u,x,A)\leqslant\int_{E-\{x\}}P(v,x,dy)P(u,y,A)$$
$$\leqslant P(v,x,E-\{x\})\leqslant 1-P(v,x,\{x\}), \tag{5.3}$$

因此，由(5.2)、(5.3)即得(2)。

(3) 若$B=A_1\times A_2$，$A_i\in\mathscr{E}$，则$P(t,x,B_x)=I_{A_1}(x)P(t,x,A_2)$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数。令

$\mathscr{G}=\{B:B=A_1\times A_2,\ A_i\in\mathscr{E}\}$，

$\mathscr{H}=\{B:B\in\mathscr{E}\times\mathscr{E},\ P(t,x,B_x)$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数$\}$，

则$\mathscr{G}$是π系统，$\mathscr{G}\subset\mathscr{H}$，$\mathscr{H}$是$d$系统，(关于$\pi$系统与$d$系统的定义参见[20](2.1))由[20](2.2)知$\mathscr{H}\supset\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{E}\times\mathscr{E}$。(3)得证。

§6 半群的强连续性

本节均设$\boldsymbol{T}=[0,\infty)$，$(E,\mathscr{E})$是可测空间，$\mathscr{E}$包含$E$的一切单点集，$\mathscr{M}$、$\mathscr{L}$是§1定义的两个Banach空间，$P(t,x,A)$是标准的准转移函数，$\Psi(\lambda,x,A)$是其拉氏变换，$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$是其位势算子，$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$，$\{V_t:t\in\boldsymbol{T}\}$是(4.1)、(4.2)所定义的半群。$\{F_t:t\in\boldsymbol{T}\}$是任一Banach空间$\boldsymbol{B}$上的半群。在这一节中，我们将要研究$\{F_t\}$、$\{P_t\}$和$\{V_t\}$的强连续性。

定义6.1 设A为直线上一Lebesgue可测集，$u(t)$是定义在A上取值于$\boldsymbol{B}$中的抽象函数。称$u(t)$是弱可测的，如果对$\boldsymbol{B}$上的任何一个有界线性泛函l，$l(u(t))$都是一个定义在A上的实变实值Lebesgue可测函数。

显然，若$u(t)$强可测，则$u(t)$必弱可测。

$u(t)$有时代表抽象函数，有时代表它在t这一点所对应的像，(在$\boldsymbol{B}$中)。

令

$$S(A,\mathbf{B})=\left\{u(t):\ \begin{array}{l}u(t):\ A\longrightarrow\mathbf{B},\ u(t)\text{弱}\\ \text{可测，且}\sup\limits_{t\in A}\|u(t)\|<\infty.\end{array}\right\}.$$

引理6.1 设$\mathbf{B}$是可分的（即有可数稠子集）Banach 空间，$u(t):A\longrightarrow\mathbf{B}$，$u(t)$弱可测，则$\|u(t)\|$是定义在$A$上的实变实值Lebesgue可测函数。

证：设$\{f_n\}$是$\mathbf{B}$中一个可数稠子集。由Hahn—Banach定理，可以在$\mathbf{B}$上作一串有界线性泛函$\{l_n\}$，使

$$l_n(f_n)=\|f_n\|,\quad |l_n(f)|\leqslant\|f\|,\quad (f\in\mathbf{B},\ n\geqslant 1).$$

再令

$$\alpha(f)=\sup_{n\geqslant 1}l_n(f),\quad (f\in\mathbf{B}),$$

则

$$\alpha(f)\leqslant\|f\|,\quad (f\in\mathbf{B}), \tag{6.1}$$

$$\alpha(f_n)=\sup_{k\geqslant 1}l_k(f_n)\geqslant l_n(f_n)=\|f_n\|. \tag{6.2}$$

因此，由(6.1)、(6.2)得$\alpha(f_n)=\|f_n\|$。所以

$$\begin{aligned}\alpha(f)&\geqslant l_n(f)=l_n(f_n)+l_n(f-f_n)\\ &\geqslant\|f_n\|-\|f-f_n\|\geqslant\|f\|-2\|f-f_n\|.\end{aligned} \tag{6.3}$$

又因为$\{f_n\}$在$\mathbf{B}$中稠，$f\in\mathbf{B}$，所以

$$\liminf_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0.$$

因此，在(6.3)中令$n\to\infty$取下极限可得：

$$\alpha(f)\geqslant\|f\|,\quad (f\in\mathbf{B}). \tag{6.4}$$

由(6.1)及(6.4)得：

$$\alpha(f)=\|f\|,\quad (f\in\mathbf{B}). \tag{6.5}$$

特别地，对每一个$t\in A$，有

$$\|u(t)\|=\alpha(u(t))=\sup_{n\geqslant 1}l_n(u(t)).$$

而由假设$u(t)$是弱可测的，所以$l_n(u(t))$是t的实变实值 Lebesgue 可测函数，故$\|u(t)\|$亦然。

引理6.2 设$\boldsymbol{B}$是可分 Banach 空间，$S(A,\boldsymbol{B})$ 定义如前，$\mu^*(A)<\infty$（μ^*是 Lebesgue 测度），若$S_0\subset S(A,\boldsymbol{B})$且满足下列条件：

(a) $u(t)$：$A\mapsto\boldsymbol{B}$，$u(t)$强连续$\Longrightarrow u(t)\in S_0$；

(b) $u_1(t)$、$u_2(t)\in S_0\Longrightarrow u_1(t)+u_2(t)\in S_0$；

(c) $u_n(t)\in S_0$，$(n\geqslant 1)$，$u(t)\in S(A,\boldsymbol{B})$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A\|u_n(t)-u(t)\|dt=0, \tag{6.6}$$

$\Longrightarrow u(t)\in S_0$，

则$S_0=S(A,\boldsymbol{B})$。

证：(1) 首先证明：对任何 $f\in\boldsymbol{B}$，及A的 Lebesgue 可测子集Λ，均有 $I_\Lambda(t)f\in S_0$。

今任取A中二串闭集$\{B_n'\}$、$\{B_n''\}$，使

$B_n'\subset A-\Lambda$，$B_n''\subset\Lambda$，$(n\geqslant 1)$，

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(\Lambda-(B_n'\cup B_n''))=0.$$

令

$$\psi_n(t)=\frac{\rho(t,B_n')}{\rho(t,B_n')+\rho(t,B_n'')},\quad(t\in A,\ n\geqslant 1).$$

其中$\rho(t,B)=\inf\limits_{s\in B}|s-t|$ 是t到 B 的距离．显然，$0\leqslant\psi_n(t)\leqslant 1$，$\psi_n(t)$连续，而且

$$\psi_n(t)=I_\Lambda(t),\quad(t\in B_n'\cup B_n'',\ n\geqslant 1).$$

所以

$$\int_A|I_\Lambda(t)-\psi_n(t)|dt\leqslant\mu^*(A-(B_n'\cup B_n'')),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_A|I_\Lambda(t)-\psi_n(t)|dt=0.$$

任取$f\in\boldsymbol{B}$，则由$\psi_n(t)$的连续性可得出$\psi_n(t)f$ 是强连续的，

因此由(a)得知$\psi_n(t)f\in S_0$。显然$I_\Lambda(t)f\in S(A,\boldsymbol{B})$；而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Lambda\|I_\Lambda(t)f-\psi_n(t)f\|dt=\|f\|\lim_{n\to\infty}\int_A|I_\Lambda(t)-\psi_n(t)|dt$$
$$=0。$$

所以，由(c)得$I_\Lambda(t)f\in S_0$。

(2) 任取$u(t)\in S(A,\boldsymbol{B})$，往证$u(t)\in S_0$。

事实上，由$u(t)\in S(A,\boldsymbol{B})$得知存在$k$使

$$\sup_{t\in A}\|u(t)\|\leqslant k。$$

令$\{f_n\}$是$\boldsymbol{B}$的可数稠子集，

$$A_{m,n}=\left\{t:t\in A,\ \|u(t)-f_1\|\geqslant\frac{1}{m},\ \cdots,\ \|u(t)-f_{n-1}\|\geqslant\frac{1}{m},\right.$$
$$\left.\|u(t)-f_n\|<\frac{1}{m}\right\},$$

则由$\sup_{t\in A}\|u(t)\|\leqslant k$得：

$$\|f_n\|\geqslant k+\frac{1}{m}\Rightarrow A_{m,n}=\emptyset。$$

因为$u(t)-f_n$是t的弱可测抽象函数，故由引理6.1得知：$A_{m,n}$是Lebesgue可测集。由$\{f_n\}$在$\boldsymbol{B}$中稠可得$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{m,n}=A$，$(m\geqslant1)$。显然$\{A_{m,n}:n\geqslant1\}$不交。所以可以取$r_m$使

$$\lim_{m\to\infty}\mu^*\left(A-\bigcup_{n=1}^{r_m}A_{m,n}\right)=0。$$

再令

$$u_m(t)=\sum_{n=1}^{r_m}I_{A_{m,n}}(t)f_n,\qquad(m\geqslant1,\ t\in A),$$

则由(1) 已证$u_m(t)\in S_0$，$(m\geqslant1)$，显然

$$\|u(t)-u_m(t)\|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{m}, & \text{当}t\in\bigcup_{n=1}^{r_m}A_{m,n},\\ k, & \text{反之}\end{cases},$$

因此

$$\limsup_{m\to\infty}\int_A \|u(t)-u_m(t)\|dt$$

$$\leqslant \limsup_{m\to\infty} k\mu^*\left(A-\bigcup_{n=1}^{k_m} A_{m,n}\right)+\limsup_{m\to\infty}\frac{\mu^*(A)}{m}=0.$$

所以，由(c)知$u(t)\in S_0$。引理证毕。

引理6.3 设$0<a<b<t_0$，$u(t)\in S((0,\ t_0),\mathscr{B})$，则

$$\lim_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u(s+h)-u(s)\|ds=0. \qquad (6.7)$$

证：令

$S_0=\{u(t):\ u(t)\in S((0,\ t_0),\mathscr{B}),\ u(t)$满足（6.7）$\}$，则$S_0$满足引理6.2中条件（$a$)和（$b$)。因此，为证引理6.3，用引理6.2，只须证明$S_0$满足引理6.2中条件($c$)。事实上，任取$u_n(t)\in S_0$，($n\geqslant 1$)，$u(t)\in S((0,\ t_0),\ \mathscr{B})$，且(6.6) 成立。则由$u_n(t)\in S_0$有

$$\limsup_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u(s+h)-u(s)\|ds$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u(s+h)-u_n(s+h)\|ds$$

$$+\limsup_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u_n(s+h)-u_n(s)\|ds$$

$$+\limsup_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u_n(s)-u(s)\|ds$$

$$\leqslant 2\limsup_{h\to 0}\int_{(0,t_0)}\|u_n(s)-u(s)\|ds$$

$$+\limsup_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u_n(s+h)-u_n(s)\|ds$$

$$=2\int_{(0,t_0)}\|u_n(s)-u(s)\|ds.$$

再用$u_n(t)\in S_0$，$u(t)\in S((0,\ t_0),\boldsymbol{B})$ 及 (6.6) 成立，在上式中令$n\to\infty$得：

$$\limsup_{h\to 0}\int_{[a,b]}\|u(s+h)-u(s)\|ds=0,$$

故$u(t)\in S_0$。于是引理6.2的条件(c)得证。引理6.3证毕。

定理6.1 设$\{F_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是可分*Banach*空间$\boldsymbol{B}$上的压缩型半群，如果$F_tf$是弱可测的，则$F_tf$在$t\in(0,\ \infty)$ 上强连续。

证：任取$t_0>0$。设$0<a<b<t_0$，$s<t_0$，$s<t_0+h$，则由半群性质得：

$$\|F_{t_0+h}f-F_{t_0}f\|\leqslant\|F_{t_0+h-s}f-F_{t_0-s}f\|. \tag{6.8}$$

又因为F_tf是弱可测的，所以由引理6.1得知(6.8)右边是s的*Lebesgue*可测函数。把 (6.8) 对s从t_0-b到t_0-a积分得

$$(b-a)\|F_{t_0+h}f-F_{t_0}f\|\leqslant\int_{[a,b]}\|F_{s+h}f-F_sf\|ds. \tag{6.9}$$

但是

$$\sup_{s\geqslant 0}\|F_sf\|\leqslant\|f\|,\ F_sf\text{弱可测},$$

所以$F_sf\in S((0,\ t_0),\boldsymbol{B})$，因此，由(6.9) 及引理6.3有

$$\lim_{h\to 0}\|F_{t_0+h}f-F_{t_0}f\|=0.$$

此即F_tf在t_0强连续。定理6.1得证。

定理6.2 若$P(t,\ x,\ A)$ 是标准准转移函数，则$\{V_t: t\in\boldsymbol{T}\}$是$\mathscr{L}$上的强连续半群，即是任取$\varphi\in\mathscr{L}$，$V_t\varphi$在$t\in\boldsymbol{T}$上强连续。

证：任取$\varphi\in\mathscr{L}$，令A_t、B_t是$V_t\varphi-\varphi$的一组*Hahn*分解，即是说A_t、B_t分别为$V_t\varphi-\varphi$的正、负集，$A_t\cap B_t=\varnothing$，$A_t\cup B_t=E$。则

$$\|V_t\varphi-\varphi\|=\int_E\varphi(dx)(P(t,\ x,\ A_t)-I_{A_t}(x))$$

$$-\int_E\varphi(dx)(P(t,\ x,\ B_t)-I_{B_t}(x))$$

$$\leqslant \int_E |\varphi|(dx)|P(t, x, A_t) - I_{A_t}(x)|$$

$$+\int_E |\varphi|(dx)|P(t, x, B_t) - I_{B_t}(x)|.$$

但是$|\varphi|(E)<\infty$，$|P(t, x, A_t) - I_{A_t}(x)|\leqslant 2$，而且由定理5.1有

$$\limsup_{t\to 0+}|P(t, x, A_t) - I_{A_t}(x)| \leqslant \limsup_{t\to 0+}|1-P(t, x, \{x\})|$$

$=0$，所以由控制收敛定理有：

$$\lim_{t\to 0+}\int_E |\varphi|(dx)|P(t, x, A_t) - I_{A_t}(x)| = 0.$$

仿之有

$$\lim_{t\to 0+}\int_E |\varphi|(dx)|P(t, x, B_t) - I_{B_t}(x)| = 0.$$

总之，对任何$\varphi\in\mathscr{L}$，有

$$\lim_{t\to 0+}\|V_t\varphi - \varphi\| = 0.$$

再利用$\{V_t: t\in\boldsymbol{T}\}$是压缩型半群及命题3.1得知$\{V_t: t\in T\}$是强连续的。

定理6.3 设$P(t, x, A)$标准的准转移函数，$\{P_t: t\in\boldsymbol{T}\}$，$\{\Psi_\lambda: \lambda>0\}$分别为其在$\mathscr{M}$上产生之半群与位势算子。令$\mathscr{M}'$是$\mathscr{M}$的闭线性子空间，记

$$\Psi_\lambda(\mathscr{M}') = \{f: f=\Psi_\lambda g, \ g\in\mathscr{M}'\},$$

若$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')\subset\mathscr{M}'$，$(\lambda>0)$，则下列诸陈述等价：

(1) $\{P_t: t\in\}\boldsymbol{T}$在$\mathscr{M}'$上强连续；

(2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_\lambda f - f\| = 0$，$(f\in\mathscr{M}')$；

(3) $\Psi_\lambda(\mathscr{M}')$在$\mathscr{M}'$中稠，$(\lambda>0)$。

证：(1)⇒(2)．设$\{P_t\}$在$\mathscr{M}'$上强连续．任取$f\in\mathscr{M}'$，由于

$$\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|=\left\|\int_{[0,\infty)}\lambda e^{-\lambda t}(P_tf-f)dt\right\|$$

$$\leqslant\int_{[0,\infty)}\lambda e^{-\lambda t}\|P_tf-f\|dt,$$

所以，利用P_tf在$t\in[0,\ \infty)$上强连续，并应用控制收敛定理在上式中令$\lambda\to\infty$即得(2)。

(2) ⇒ (3)．设$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|=0$，$(f\in\mathscr{M}')$。则由$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$满足预解方程式：

$(\Psi_\lambda-\Psi_\mu)+(\lambda-\mu)\Psi_\lambda\circ\Psi_\mu=0$，$(\lambda>0,\ \mu>0)$ 及$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')\subset\mathscr{M}'$可知：

$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')=\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}')$　　(不依赖$\lambda>0$)。

所以，任取$\lambda>0$，$f\in\mathscr{M}'$，必有$g\in\mathscr{M}'$，使

$\Psi_\lambda f=\Psi_{\lambda_0}g$，(g可依赖λ及f)，

因此

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_{\lambda_0}g-f\|=\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|=0.$$

此即$\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}')$在$\mathscr{M}'$中稠。

(3) ⇒ (1)．设$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')$在$\mathscr{M}'$中稠，$(\lambda>0)$。由于$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')=\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}')$ 不依赖$\lambda>0$，所以任取$f\in\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}')$，必存在$g\in\mathscr{M}'$，使 $f=\Psi_\mu g$。因此，由$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$满足预解方程式可得：

$$\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|=\|\lambda\Psi_\lambda\Psi_\mu g-\Psi_\mu g\|$$

$$=\left\|\frac{\lambda}{\mu-\lambda}(\Psi_\lambda-\Psi_\mu)g-\Psi_\mu g\right\|$$

$$\leqslant\left\|\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\Psi_\lambda g\right\|+\left\|\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+1\right)\Psi_\mu g\right\|$$

$$\leqslant\frac{2}{|\mu-\lambda|}\|g\|.$$

因此，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|=0$，$(f\in\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}'))$。

但是，$\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}')$在$\mathscr{M}'$中稠，所以，任取$f\in\mathscr{M}'$，均有$f_n\in\Psi_{\lambda_0}(\mathscr{M}')$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$。因此，由$\|\lambda\Psi_\lambda\|\leqslant 1$得：

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|$$
$$\leqslant\limsup_{\lambda\to\infty}(\|\lambda\Psi_\lambda f-\lambda\Psi_\lambda f_n\|+\|\lambda\Psi_\lambda f_n-f_n\|+\|f_n-f\|)$$
$$\leqslant\limsup_{\lambda\to\infty}(2\|f_n-f\|+\|\lambda\Psi_\lambda f_n-f_n\|)=2\|f_n-f\|.$$

再在上式中令$n\to\infty$即得：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda\Psi_\lambda f-f\|=0,\quad (f\in\mathscr{M}'). \tag{6.10}$$

任取一个固定的$\lambda>0$。由于$\{\Psi_\mu:\mu>0\}$满足预解方程式，且$\Psi_\mu(\mathscr{M}')\subset\mathscr{M}'$，$(\mu>0)$，所以对任何$f\in\mathscr{M}'$，均有：

"$\Psi_{\mu_0}f=0$（对某一个$\mu_0>0$）$\Rightarrow\Psi_\mu f\equiv 0$（对一切$\mu>0$）"。

若$\Psi_\lambda f=0$，则由(6.10)得：$f=\lim\limits_{\mu\to\infty}\mu\Psi_\mu f=0$。此即，把$\Psi_\lambda$的定义域由$\mathscr{M}$局限到$\mathscr{M}'$去时，$\Psi_\lambda$是由$\mathscr{M}'$到$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')$的一对一的算子。又因为$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')$在$\mathscr{M}'$中稠，而且$\Psi_\lambda$是有界线性算子，$\|\lambda\Psi_\lambda\|\leqslant 1$，所以由定理3.4得知：在$\mathscr{M}'$上存在唯一一个强连续的压缩型的半群$\{\tilde{P}_t:t\in\boldsymbol{T}\}$，使其预解式就是$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$，更有

$$(\Psi_\lambda f)(x)=\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}(\tilde{P}_tf)(x)dt,(f\in\mathscr{M}',\lambda>0). \tag{6.11}$$

当然还有"$f\in\mathscr{M}'\Rightarrow\tilde{P}_tf\in\mathscr{M}'$，$(t\in\boldsymbol{T})$，"但是

$$(\Psi_\lambda f)(x)=\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}(\boldsymbol{P}_tf)(x)dt,\quad(f\in\mathscr{M},\ \lambda>0). \tag{6.12}$$

所以，若能证对任何$f\in\mathscr{M}'$，$(\boldsymbol{P}_tf)(x)$，$(\tilde{P}_tf)(x)$是$t\in\boldsymbol{T}$的连续函数，则由(6.11)、(6.12)及拉氏变换的唯一性定理可得：

$\tilde{P}_tf=\boldsymbol{P}_tf$，$(f\in\mathscr{M}',\ t\in\boldsymbol{T})$，

从而$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$在$\mathscr{M}'$上强连续，且$P_t(\mathscr{M}')\subset\mathscr{M}'$ $(t\in\boldsymbol{T})$，亦

即定理6.3得证。

事实上，任取$f\in\mathscr{M}'$，由$\tilde{P}_tf$在$t\in\boldsymbol{T}$上强连续，更有$(\tilde{P}_tf)(x)$在$t\in\boldsymbol{T}$上连续。又因为对任何$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，由定理5.1知$P(t, x, A)$是$t\in\boldsymbol{T}$的连续函数，所以对$(E, \mathscr{E})$上的任何简单函数，即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(x) \quad \left(\begin{array}{l} c_i\text{是实数，} A_i\in\mathscr{E}, \ \{A_i\}\text{两两不} \\ \text{交，且}\bigcup_{i=1}^{n} A_i=E \end{array}\right)$$

来说，$(P_tf)(x)$是$t\in\boldsymbol{T}$的连续函数。今任取$f\in\mathscr{M}$，必有简单函数列$\{f_n\}$使

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0. \tag{6.13}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to t_0}|(P_tf)(x)-(P_{t_0}f)(x)| \\
&\leqslant\limsup_{t\to t_0}(|(P_tf)(x)-(P_tf_n)(x)| \\
&\quad+|(P_tf_n)(x)-(P_{t_0}f_n)(x)|+|(P_{t_0}f_n)(x)-(P_{t_0}f)(x)|) \\
&\leqslant\limsup_{t\to t_0}\Big(\Big|\int_E P(t, x, dy)(f(y)-f_n(y))\Big| \\
&\quad+\Big|\int_E P(t_0, x, dy)(f_n(y)-f(y))\Big|\Big) \\
&\leqslant 2\|f-f_n\|.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

在(6.14)中令$n\to\infty$并注意(6.13)即得：

$$\lim_{t\to t_0}|(P_tf)(x)-(P_{t_0}f)(x)|=0.$$

定理6.3得证。

系1 若$\Psi_\lambda(\mathscr{M}')\subset\mathscr{M}'$，$(\lambda>0)$，定理6.3中的(1)(或者(2)或者(3))成立，则$P_t(\mathscr{M}')\subset\mathscr{M}'$，$(t\in\boldsymbol{T})$。

此事实在定理6.3的(3)⇒(1)的证明中已证。

§7 准转移函数的可微性与Kolmogorov方程

本节恒设 $\boldsymbol{T}=[0,\infty)$，$(E,\mathscr{E})$ 是可测空间，对角线集 $D\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$，从而$\mathscr{E}$含E之全体单点集，$P(t,x,A)$是标准准转移函数，我们将要研究$P(t,x,A)$作为$t$的函数的可微性。

定理7.1 设$P(t,x,A)$是标准准转移函数，则对任何$x\in E$，$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\}))$存在且等于$q(x)=\sup\limits_{t>0}\frac{1}{t}f(t,x)$，其中

$f(t,x)=-\log P(t,x,\{x\})$。($q(x)$可为$+\infty$)此外，$q(x)$是广义实值的$\mathscr{E}$可测函数，而且

(1) $1-P(t,x,\{x\})\leqslant 1-e^{-q(x)t}$； (7.1)

(2) $|P(u,x,A)-P(v,x,A)|\leqslant 1-e^{-q(x)|u-v|}$。 (7.2)

(若$q(x)=+\infty$，$t>0$，$e^{-q(x)t}$理解为0。)

先证明一个引理。

引理7.1 设f：$[0,\infty)\to[0,\infty]$，且满足：

(A) 半可加性：$f(u+v)\leqslant f(u)+f(v)$，$(u,v\geqslant 0)$；

(B) $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=0$，

则 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}f(t)=\sup\limits_{t>0}\frac{f(t)}{t}$。

证： 令$\eta(u)=\sup\limits_{0<t<u}f(t)$。任取$t>0$，则对任何$u\in(0,t)$来说，均存在正整数$n=n(u)$，使

$$nu<t\leqslant(n+1)u。\tag{7.3}$$

反复地利用(A)及(7.3)得：

$$f(t)\leqslant f(t-nu)+f(nu)\leqslant\eta(u)+nf(u),$$

所以

$$\frac{1}{t}f(t)\leqslant\frac{1}{t}\eta(u)+\frac{n}{t}f(u)。\tag{7.4}$$

在(7.4)中令$u \to 0+$得：

$$\frac{1}{t} f(t) \leqslant \liminf_{u \to 0+} \frac{f(u)}{u}, \quad (t>0). \tag{7.5}$$

故 $\sup\limits_{t>0} \frac{1}{t} f(t) \leqslant \liminf\limits_{u \to 0+} \frac{f(u)}{u}$. 引理得证。

现在用引理7.1来证明定理7.1. 任取$x \in E$固定，令$f(t)=f(t, x)=-\log P(t,x,\{x\})$，则$f(t)$满足引理7.1的全部条件，所以

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{f(t)}{t} = q(x). \tag{7.6}$$

(i) 若$q(x)=0$，则$f(t)\equiv 0$，$(t>0)$. 所以
$P(t,x,\{x\})\equiv 1$，$(t\geqslant 0)$，从而

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\})) = q(x).$$

(ii) 若$q(x)>0$，则当t充分接近于0时$f(t)>0$，所以

$$\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\})) = \frac{1-e^{-f(t)}}{f(t)} \cdot \frac{f(t)}{t}. \tag{7.7}$$

在(7.7)中令$t \to 0+$并注意$\lim\limits_{t \to 0+} f(t)=0$，则得

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\})) = q(x).$$

由(7.6)立即得：

$$1-P(t,x,\{x\}) \leqslant 1-e^{-q(x)t}.$$

由此不等式及定理5.1(2)得：

$$|P(u,x,A)-P(v,x,A)| \leqslant 1-e^{-q(x)|u-v|}.$$

至于$q(x)$是$\mathscr{E}$可测的，由定理5.1(3)即得。

定义7.1 若$q(x)=0$，则称x是$P(t,x,A)$的吸收状态；若$q(x)=+\infty$，则称x是瞬变状态；若$0\leqslant q(x)<\infty$，则称x是稳定状态。

记$\mathscr{E}(u)=\{A: A\in\mathscr{E}, \lim\limits_{t\to 0+}\sup\limits_{x\in A}(1-P(t,x,\{x\}))=0\}$. 易证$\mathscr{E}(u)$是一个环而且"$A\in\mathscr{E}(u)$，$B\subset A$，$B\in\mathscr{E}\Rightarrow B\in\mathscr{E}(u)$"。

定理7.2 若$A\in\mathscr{E}(u)$，$x\bar{\in}A$，则

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}P(t,x,A)=q(x,A)$$

存在，且$0\leqslant q(x,A)<\infty$。

先证明一个引理。

引理7.2 任给$B\in\mathscr{E}(u)$，$\varepsilon<\frac{1}{4}$，如果对一切$y\in B,0\leqslant t\leqslant\tau$，都有

$$1-P(t,y,\{y\})<\varepsilon, \tag{7.8}$$

则对一切$v\in(0,\ \tau]$，$\frac{u}{v}\in(0,\ \varepsilon]$，$A\in\mathscr{E}$，$A\subset B$，$x\in B-A$，均有

$$(1-4\varepsilon)\frac{P(u,x,A)}{u}\leqslant\frac{P(v,x,A)}{v}. \tag{7.9}$$

证：令

$$F_1(y,D)=P(u,y,D),\quad (y\in E,\ D\in\mathscr{E}),$$

$$F_{m+1}(y,D)=\int_{E-A}F_m(y,dz)P(u,z,D),\ (m\geqslant 1,y\in E,D\in\mathscr{E}),$$

则对任何固定的$y\in E$，$F_m(y,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度，对任何固定的$D\in\mathscr{E}$，$F_m(\cdot,\ D)$是$\mathscr{E}$可测的。

对m作归纳法可证

$$P(t,x,D)=\sum_{j=1}^{m}\int_A F_j(x,dy)P(t-ju,y,D)$$
$$+\int_{E-A}F_m(x,dy)P(t-mu,y,D), \tag{7.10}$$

$(D\in\mathscr{E},\ m\geqslant 1,\ t\geqslant mu)$。

事实上，当$m=1$时，用$(K-C)$方程知(7.10)成立。若(7.10)对m成立，则

$$P(t,x,D)=\sum_{j=1}^{m+1}\int_A F_j(x,dy)P(t-ju,\ y,D)$$
$$+\int_{E-A}F_{m+1}(x,dy)P(t-(m+1)u,y,D)$$
$$+\int_{E-A}F_m(x,dy)P(t-mu,y,D)$$
$$-\int_E F_{m+1}(x,dy)P(t-(m+1)u,y,D).$$

但是

$$\int_E F_{m+1}(x,dy)P(t-(m+1)u,y,D)$$
$$=\int_E\int_{E-A}F_m(x,dz)P(u,z,dy)P(t-(m+1)u,y,D)$$
$$=\int_{E-A}F_m(x,dy)P(t-mu,y,D),$$

以此代入上式发现对$m+1$，(7.10)亦然成立。归纳法完成。今反复用(7.10)来证引理。记$n=\left[\frac{v}{u}\right]$为$\leqslant\frac{v}{u}$之最大整数。

(i) 取$D=A$，$m=n$，$t=v$，则由(7.8)、(7.10)得：

$$P(v,x,A)\geqslant\sum_{j=1}^{n}\int_A F_j(x,dy)P(v-ju,y,A)$$
$$\geqslant\sum_{j=1}^{n}\int_A F_j(x,dy)p(v-ju,y,\{y\})$$
$$\geqslant(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}F_j(x,\ A). \tag{7.11}$$

所以，由$x\in A$及(7.8)、(7.11)得：

$$\sum_{j=1}^{n}F_j(x,\ A)\leqslant\frac{p(v,x,A)}{1-\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{7.12}$$

(ii) 取$D=\{x\}$, $t=mu$, $(1\leqslant m\leqslant n)$, 则由(7.10)得:

$$P(mu,x,\{x\})\leqslant\sum_{j=1}^{m-1}F_j(x,A)+F_m(x,\{x\}),$$

所以由(7.12)及$P(mu,x,\{x\})>1-\varepsilon$得:

$$F_m(x,\{x\})\geqslant P(mu,x,\{x\})-\sum_{j=1}^{m-1}F_j(x,A)$$

$$>(1-\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}>\frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon},\quad (m\geqslant 1). \tag{7.13}$$

(iii) 令$D=A$, $m=n$, $t=v$, 则由(7.8)、(7.10)、(7.13)及$x\in A$与

$$F_{m+1}(x,M)=\int_{E-A}F_m(x,dy)P(u,y,M)$$

$$\geqslant F_m(x,\{x\})P(u,x,M),$$

可得:

$$P(v,x,A)\geqslant\sum_{j=1}^{n}\int_A F_j(x,dy)P(v-ju,y,A)$$

$$\geqslant\int_A P(u,x,dy)P(v-u,y,A)$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\int_A F_j(x,dy)P(v-ju,y,A)$$

$$\geqslant(1-\varepsilon)P(u,x,A)$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\int_A\int_{E-A}F_{j-1}(x,dy)P(u,y,dz)P(v-ju,z,A)$$

$$\geqslant(1-\varepsilon)P(u,x,A)$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\int_A P(u,x,dy)P(v-ju,y,A)F_{j-1}(x,\{x\})$$

$$\geqslant(1-\varepsilon)P(u,x,A)+\sum_{j=2}^{n}\frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}P(u,x,A)(1-\varepsilon)$$

$$=[(1-\varepsilon)+(n-1)(1-3\varepsilon)]P(u,x,A),$$

所以

$$\frac{P(v,x,A)}{v}\geqslant(1-3\varepsilon)\frac{nu}{v}\frac{P(u,x,A)}{u}.$$

但是，$\frac{nu}{v}=\left[\frac{v}{u}\right]\frac{u}{v}\geqslant 1-\frac{u}{v}\geqslant 1-\varepsilon$，所以

$$(1-4\varepsilon)\frac{P(u,x,A)}{u}\leqslant\frac{P(v,x,A)}{v}.$$

现在我们用引理7.2来证明定理7.2．令$B=A\cup\{x\}$，用引理，有

$$(1-4\varepsilon)\frac{P(u,x,A)}{u}\leqslant\frac{P(v,x,A)}{v},\qquad(7.14)$$

$\left(\text{只要}\varepsilon<\frac{1}{4},\ 0<\frac{u}{v}\leqslant\varepsilon\right)$．在(7.14)中先令$u\to 0+$取上极限次令$v\to 0+$取下极限并注意$\varepsilon$可任意小及$P(t,x,A)\geqslant 0$可得：

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}P(t,x,A)=q(x,A)$$

存在，$0\leqslant q(x,A)<\infty$．定理证毕．

定理7.2中所确定的$q(x,A)$只对$x\in E, A\in\mathscr{E}(u)$，$x\bar{\in}A$ 才有定义，为方便起见，把$q(\cdot,\cdot)$扩大到一切$x\in E$，$A\in\mathscr{E}(u)$，办法如下：

$$q(x,A)=q(x,A-\{x\}),\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}(u)).$$

定理7.3 $q(x,A)$ $(x\in E,A\in\mathscr{E}(u))$有性质：

(1) $q(x,\{x\})=0$，$q(x,A)\leqslant q(x)$，$(x\in E,\ A\in\mathscr{E}(u))$；

(2) 固定任意$x\in E$，$q(x,\cdot)$是$\mathscr{E}(u)$上有限测度；

(3) 固定任意$A\in\mathscr{E}(u)$，$q(\cdot,A)$是x的$\mathscr{E}$可测函数．

证：(1) 显然成立。

(2) 显然$q(x,\cdot)$是$\mathscr{E}(u)$上满足有限可加性的集函数，且$q(x,\varnothing)=0$，$0\leqslant q(x,A)<\infty$，所以为证(2)，只须证明：

$$\text{“}A_n\in\mathscr{E}(u),\quad A_n\subset A_{n-1},\quad \bigcap_n A_n=\varnothing\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}q(x,A_n)=0\text{”}.$$

事实上，由引理7.2，$\left(\text{在引理7.2中取}B=A_n\cup\{x\},v=\tau,\varepsilon=\frac{1}{8}\right)$有

$$\frac{1}{u}P(u,x,A_n-\{x\})\leqslant\frac{2}{\tau}P(\tau,x,A_n-\{x\}),\ \left(0<\frac{u}{\tau}\leqslant\varepsilon\right). \tag{7.15}$$

在(7.15)中令$u\to0+$得：

$$q(x,A_n)\leqslant\frac{2}{\tau}P(\tau,x,A_n-\{x\}).$$

而$P(\tau,x,\cdot)$是有限测度，故在上式中令$n\to\infty$得

$$\lim_{n\to\infty}q(x,A_n)=0.$$

(3) 由定理5.1(3)及

$$q(x,A)=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}(P(t,x,A)-I_A(x)P(t,x,\{x\})),(A\in\mathscr{E}(u))$$

可知$q(\cdot,A)$是x的$\mathscr{E}$可测函数。

定理7.4 设$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n\in\mathscr{E}(u)$，则$\mathscr{E}$是由$\mathscr{E}(u)$所产生的$\sigma$代数(注意$\mathscr{E}(u)$是环)，从而$q(x,\cdot)$可以唯一地扩张到$\mathscr{E}$上去，扩张后所得之测度仍以$q(x,\cdot)$记之。这时仍有：

(1) $q(x,A)\leqslant q(x)$，$(x\in E,A\in\mathscr{E})$；

(2) $q(\cdot,A)$ 是x的σ可测函数，$(A\in\mathscr{E})$；

(3) $q(x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度，$(x\in E)$。

证：只须注意：对任何$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，有

$$A = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \cap A)$$

及

$$q(x,A) = \lim_{n\to\infty} q(x, \bigcup_{k=1}^{n} (E_k \cap A))$$

即可。

定理7.5 设$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \subset E_{n+1}, E_n \in \mathscr{E}(u)$，若$q(x_0) = q(x_0, E) < \infty$，则

$$\left(\frac{d}{dt}P(t, x_0, A)\right)_{t=0} = q(x_0, A) - q(x_0) I_A(x_0), (A \in \mathscr{E}), \tag{7.16}$$

证： (a)设$x_0 \bar{\in} A$，则

$$\left|\frac{1}{t}P(t, x_0, A) - q(x_0, A)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{t}P(t, x_0, E_n \cap A) - q(x_0, E_n \cap A)\right|$$

$$+ \frac{1}{t}P(t, x_0, A - E_n) + q(x_0, A - E_n) \tag{7.17}$$

但是，由定理7.2有

$$\lim_{t\to 0+}\left|\frac{1}{t}P(t, x_0, E_n \cap A) - q(x_0, E_n \cap A)\right| = 0. \tag{7.18}$$

又因为由定理7.1和7.2还有：

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{1}{t}P(t, x_0 A - E_n)$$

$$\leqslant \limsup_{t\to 0+}\left(\frac{1 - P(t, x_0, \{x_0\})}{t} - \frac{P(t, x_0, E_n - \{x_0\})}{t}\right)$$

$$= q(x_0) - q(x_0, E_n),$$

所以，若注意$E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$，$E_n \subset E_{n+1}$及定理假设，则在(7.17)中先令$t \to 0+$，次令$n \to \infty$即得：

$$\lim_{t\to 0+}\left|\frac{1}{t}P(t,x_0,A)-q(x_0,A)\right|=0.$$

(*b*) 设$x_0\in A$，则

$$\left|\frac{P(t,x_0,A)-I_A(x_0)}{t}-q(x_0,A)+q(x_0)\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{P(t,x_0,A-\{x_0\})}{t}-q(x_0,A-\{x_0\})\right|$$

$$+\left|\frac{P(t,x_0,\{x_0\})-1}{t}+q(x_0)\right|,$$

利用(*a*)及定理7.1，在上式中令$t\to 0+$即发现(7.16)成立。定理证毕。

定理7.6 若$q(x)<\infty$(对一切$x\in E$)，则$E=\bigcup\limits_n^\infty E_n$，$E_n\subset E_{n+1}$，$E_n\in\mathscr{E}(u)$，从而$q(x,\ \cdot)$可由$\mathscr{E}(u)$唯一地扩张到$\mathscr{E}$上去，若还有$q(x)=q(x,\ E)$（一切$x\in E$），则

$$\left(\frac{d}{dt}P(t,\ x,\ A)\right)_{t=0}=q(x,\ A)-q(x)I_A(x),$$

$$(x\in E,\ A\in\mathscr{E}), \tag{7.19}$$

证：令$E_n=\{x: x\in E,\ q(x)<n\}$，则$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n\subset E_{n+1}$。又因为由定理7.1有

$$1-P(t,\ x,\ \{x\})\leqslant 1-e^{-q(x)t}\leqslant 1-e^{-nt},\ (x\in E_n),$$

所以

$$\lim_{t\to 0+}\sup_{x\in E_n}(1-P(t,\ x,\ \{x\}))=0,\ (n\geqslant 1).$$

此即$E_n\in\mathscr{E}(u)$。因此，用定理7.4，7.5即得定理7.6。

引理7.3 设$\{\mu_n\}$是任意可测空间$(\widetilde{E},\ \widetilde{\mathscr{E}})$上一串有限测度，且对任何$A\in\widetilde{\mathscr{E}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$存在且为有限数，记此极限为$\mu(A)$。则

(1) μ是$(\widetilde{E},\ \widetilde{\mathscr{E}})$上的有限测度；

(2) $f\in b\widetilde{\mathscr{E}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{E}}fd\mu_n=\int_{\widetilde{E}}fd\mu$；

(3) $f_n,\ f\in b\widetilde{\mathscr{E}}$，且$|f_n|\leqslant M,\ \ |f|\leqslant M,(n\geqslant 1),f_n\to f,\ \Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\widetilde{E}}f_n\ d\mu_n=\int_{\widetilde{E}}fd\mu$。

证：(1) 参看[21]p.101(19)。

(2) 由$f\in b\widetilde{\mathscr{E}}$知：存在简单函数列$\{g_m\}$，使$\lim\limits_{m\to\infty}\|g_m-f\|=0$，从而$\|g_m\|\leqslant G$，$(m\geqslant 1)$。而

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\widetilde{E}}fd\mu_n-\int_{\widetilde{E}}fd\mu\right|\\
\leqslant&\left|\int_{\widetilde{E}}fd\mu_n-\int_{\widetilde{E}}g_md\mu_n\right|+\left|\int_{\widetilde{E}}g_m\,d\mu_n-\int_{\widetilde{E}}g_md\mu\right|\\
&+\left|\int_{\widetilde{E}}g_md\mu-\int_{\widetilde{E}}fd\mu\right|.
\end{aligned}\tag{7.20}
$$

由g_m是简单函数及$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$得知(7.20)右端第二项当$n\to\infty$它趋于0；由$\|g_m\|\leqslant G$，$g_m\to f$，$\mu$是有限测度，再用控制收敛定理可知：(7.20)右端第三项当$m\to\infty$时它趋于0；若注意$\{\mu_n(\widetilde{E})\}$是收敛到有限数$\mu(\widetilde{E})$的实数序列及$\lim\limits_{m\to\infty}\|g_m-f\|=0$，且(7.20)右端第一项小于等于

$$\|f-g_m\|\cdot\sup_{n\geqslant 1}\mu_n(\widetilde{E}),$$

则可知：(7.20)右端第一项为$m\to\infty$时它趋于0(对n一致的)。总之，在(7.20)中先令$n\to\infty$次令$m\to\infty$即得(2)

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\widetilde{E}}f_n\ d\mu_n-\int_{\widetilde{E}}fd\mu\right|\\
\leqslant&\left|\int_{\widetilde{E}}f_n\ d\mu_n-\int_{\widetilde{E}}f\ d\mu_n\right|+\left|\int_{\widetilde{E}}f\ d\mu_n-\int_{\widetilde{E}}fd\mu\right|
\end{aligned}\tag{7.21}
$$

任给$\varepsilon>0$，由$f_n\to f$，$\mu(\tilde{E})<\infty$及Eropob定理知：存在$A_0\in\widetilde{\mathscr{E}}$，$\mu(A_0)<\varepsilon$，使

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\bar{\in}A_0}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A_0)=\mu(A_0)<\varepsilon$，所以存在$N_0$，使

$$\sup_{x\bar{\in}A_0}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \mu_n(A_0)<2\varepsilon,\quad (n\geqslant N_0).$$

因此，由$|f_n|\leqslant M$，$|f|\leqslant M$，得：

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\tilde{E}}f_n d\mu_n-\int_{\tilde{E}}f\,d\mu_n\right|\\&\leqslant\int_{\tilde{E}}|f_n-f|d\mu_n\\&\leqslant 2M\mu_n(A_0)+\sup_{x\bar{\in}A_0}|f_n(x)-f(x)|\mu_n(\tilde{E}-A_0)\\&\leqslant 4\varepsilon M+\varepsilon\mu_n(\tilde{E}-A_0)\qquad\qquad (n\geqslant N_0)\end{aligned}$$

若注意M是有限数，ε可任意小，$\{\mu_n(B)\}$是有界实数列$(B\in\widetilde{\mathscr{E}})$则由上式可知当$n\to\infty$时(7.21)右端第一项趋于0，而第二项由(2)知当$n\to\infty$时也趋于0，(3)得证。

定理7.7 在定理7.6的条件下，恒有：

$$\frac{d}{dt}P(t,\ x,\ A)=-q(x)P(t,\ x,\ A)+\int_E q(x,\ dy)P(t,\ y,\ A),\tag{7.22}$$

$(t\in\mathscr{T},\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$.

证：(a) 先取$t>0$。考虑$\Delta t>0$。由(K－C)方程有：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(P(t,\ x,\ A)-P(t-\Delta t,\ x,\ A))\\&=\frac{1}{\Delta t}(P(\Delta t,\ x,\ \{x\})-1)P(t-\Delta t,\ x,\ A)\\&\quad+\frac{1}{\Delta t}\int_{E-\{x\}}P(\Delta t,\ x,\ dy)P(t-\Delta t,\ y,\ A).\end{aligned}\tag{7.23}$$

由定理7.1及定理5.1得知(7.23)右端第一项当$\Delta t\to 0+$时它趋于$-q(x)P(t, x, A)$。由引理7.3(3)，定理7.6及定理5.1有：(注意$q(x, \{x\})=0$)

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}\int_{E-\{x\}}F(\Delta t, x, dy)P(t-\Delta t, y, A)$$

$$=\int_{E-\{x\}}q(x, dy)P(t, y, A)$$

$$=\int_E q(x, dy)P(t, y, A)$$

总之，有

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}(P(t, x, A)-P(t-\Delta t, x, A))$$

$$=-q(x)P(t, x, A)+\int_S q(x, dy)P(t, y, A), (t>0) \tag{7.24}$$

(b) 再取$t\geqslant 0$, $\Delta t>0$，由(K-C)方程有：

$$\frac{1}{\Delta t}(P(t+\Delta t, x, A)-P(t, x, A))$$

$$=\frac{1}{\Delta t}(P(\Delta t, x, \{x\})-1)P(t, x, A)$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{E-\{x\}}P(\Delta t, x, dy)P(t, y, A).$$

仿(a)有

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}(P(t+\Delta t, x, A)-P(t, x, A))$$

$$=-q(x)P(t, x, A)+\int_E q(x, dy)P(t, y, A), \quad (t\geqslant 0) \tag{7.25}$$

由(7.25)、(7.24)即得定理7.7。

定理7.8 若$\sup\limits_{x\in E}q(x)=Q<\infty$, $q(x)=q(x \quad E)$, $(x\in E)$,

则

$$\frac{d}{dt}P(t, x, A)$$

$$=\int_E P(t, x, dy)(-q(y)I_A(y)+q(y, A)), \qquad (7.26)$$

$(t\in \boldsymbol{T}, x\in E, A\in\mathscr{E})$。

证：由定理7.1及$\sup\limits_{x\in E}q(x)=Q<\infty$，有：

$$\sup_{\Delta t>0}\sup_{y\in E}\left|\frac{P(\Delta t, y, A)-P(0, y, A)}{\Delta t}\right|$$

$$\leqslant \sup_{\Delta t>0}\frac{1-e^{-Q\Delta t}}{\Delta t}\leqslant Q. \qquad (7.27)$$

$$\sup_{y\in E}|-q(y)I_A(y)+q(y, A)|\leqslant 2Q. \qquad (7.28)$$

而当$t\geqslant 0$，$\Delta t>0$，有

$$\frac{P(t+\Delta t, x, A)-P(t, x, A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E P(t, x, dy)\left(\frac{P(\Delta t, y, A)-P(0, y, A)}{\Delta t}\right).$$

$$(7.29)$$

用定理7.6并注意(7.27)、(7.28)再用控制收敛定理，在(7.29)中令$\Delta t\to 0+$得：

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t+\Delta t, x, A)-P(t, x, A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E P(t, x, dy)(-q(y)I_A(y)+q(y, A))(t\geqslant 0).$$

$$(7.30)$$

若$t>0$，$\Delta t>0$，则有

$$\frac{P(t, x, A)-P(t-\Delta t, x, A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E P(t-\Delta t,\ x,\ dy)\left(\frac{P(\Delta t,\ y,\ A)-P(0,\ y,\ A)}{\Delta t}\right).$$

(7.31)

用定理7.6并注意(7.27)、(7.28) 再用引理7.3(3)，在(7.31)中令$\Delta t\to 0+$得：

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t,\ x,\ A)-P(t-\Delta t,\ x,\ A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E P(t,\ x,\ dy)(-q(y)I_A(y)+q(y,\ A)).\quad (t>0).$$

(7.32)

由(7.30)及(7.32)即得定理7.8。

§8 半群的可微性

本节设$T=[0,\ \infty)$，$\boldsymbol{B}$是Banach空间，$\{F_t:t\in\boldsymbol{T}\}$是$\boldsymbol{B}$上的压缩型半群，$\boldsymbol{A}$和$\{R_\lambda:\lambda>0\}$分别为其无穷小算子与预解式。$\mathscr{D}_A$是$\boldsymbol{A}$的定义域，$\boldsymbol{B}_0=\{f:f\in\boldsymbol{B},\ f=(s)\lim\limits_{t\to 0+}F_tf\}$。

定理8.1 设$f\in\mathscr{D}_A$，令$u(t)=F_tf$，$(t\in\boldsymbol{T})$，则$u(t)$是微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)=\boldsymbol{A}u(t),\\ u(t)\text{满足}\begin{cases}(a)\ u(t)\text{有强连续的导数}u'(t);\ (t\in\boldsymbol{T}),\\ (b)\ \sup\limits_{t\in T}\|u(t)\|<c,\ c\text{是实数};\\ (c)\ \lim\limits_{t\to 0+}u(t)=f,\end{cases}\end{cases}$$

的唯一解。

注意：本定理中所涉及的极限、连续、导数、积分均系强极限、强连续、强导数与Bochner积分。

证：(1) 先证$u(t)$是上述微分方程式的一个解。事实上，由

命题3.2得知

$$\frac{d}{dt}u(t)=\frac{d}{dt}F_tf=\boldsymbol{A}\circ F_tf=\boldsymbol{A}u(t),\ (t\in\boldsymbol{T}),$$

由 $\boldsymbol{A}u(t)\in\boldsymbol{B}_0(t\in\boldsymbol{T})$ 得知 $\boldsymbol{A}u(t)$ 对 $t\in\boldsymbol{T}$ 强连续。显然 $\|u(t)\|=\|F_tf\|\leqslant\|f\|$，而且 $\lim\limits_{t\to0^+}u(t)=\lim\limits_{t\to0^+}F_tf=f$。这就证明了 $u(t)$ 是解。

(2) 再证上述微分方程式的解唯一。为此，只须证

"$\frac{d}{dt}u(t)=\boldsymbol{A}u(t)$，$u(t)$ 满足(a)、(b)及 $\lim\limits_{t\to0^+}u(t)=0$ $\Longrightarrow u(t)\equiv0$"。

事实上，令 $v(t)=e^{-\lambda t}u(t)$，$(\lambda>0)$，则

$$\frac{d}{dt}v(t)=-\lambda e^{-\lambda t}u(t)+e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}u(t)$$
$$=-(\lambda I-\boldsymbol{A})v(t),$$

亦即

$$v(t)=-R_\lambda\left(\frac{d}{dt}v(t)\right).$$

但是 R_λ 是有界线性算子，$\frac{d}{dt}v(t)$ 是 t 的强连续函数，所以由定理2.4及2.6得：

$$\int_{[0,t]}v(r)dr=-R_\lambda\left(\int_{[0,t]}\frac{d}{dr}v(r)dr\right)$$
$$=-R_\lambda(v(t)-v(0))=-R_\lambda v(t).$$

(注意 $u(t)$ 强连续，故 $v(0)=u(0)=\lim\limits_{t\to0^+}u(t)=0$。) 但是，$\|u(t)\|<c$，$(t\in\boldsymbol{T})$，$u(t)$ 在 $\boldsymbol{T}$ 强连续，故 $\|v(t)\|<e^{-\lambda t}c$ 且 $v(t)$ 在 $\boldsymbol{T}$ 强连续，所以，由定理2.2及2.3得：

$$\int_{[0,\infty)}v(r)\,dr=\lim_{t\to\infty}\int_{[0,t]}v(r)\,dr=\lim_{t\to\infty}(-R_\lambda v(t)).$$

但是

$$\limsup_{t\to\infty}\|R_\lambda v(t)\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\limsup_{t\to\infty}\|v(t)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\limsup_{t\to\infty}ce^{-\lambda t}=0,$$

所以

$$\int_{[0,\infty)}v(r)dr=0,$$

从而，对$\boldsymbol{B}$上任何一个有界线性泛函l有

$$\int_{[0,\infty)}e^{-\lambda t}l(u(t))dt=0.$$

由于$l(u(t))$是t的实变实值的连续函数，所以由拉氏变换之唯一性得知$l(u(t))\equiv 0$，$(t\in\boldsymbol{T})$。所以由*Hahn—Banach*定理得知$u(t)\equiv 0$，$(t\in\boldsymbol{T})$。定理证毕。

第　二　编

q过程的构造理论

§1　q过程的存在性

在这一编中，恒设$\boldsymbol{T}=[0, \infty)$，$(E, \mathscr{E})$是可测空间（以后还要规定拓扑），对角线集$D\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$，从而$\mathscr{E}$包含$E$的一切单点集。本编所言（准）转移函数，均为时齐的。

在第一编中，我们研究过标准准转移函数$P(t,x,A)$（$t\in\boldsymbol{T}$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）对$t\in\boldsymbol{T}$的可微性，及其导数$\frac{d}{dt}P(t, x, A)$的性质，特别地，$\left(\frac{d}{dt}P(t, x, A)\right)_{t=0}=-q(x)I_A(x)+q(x, A)$的性质。而本编，将要研究：给定满足某些条件的$q$函数对$q(x)$——$q(x, A)$，是否恒存在标准的准转移函数$P(t, x, A)$，使$\left(\frac{d}{dt}P(t, x, A)\right)_{t=0}=-q(x)I_A(x)+q(x, A)$？如存在，再问是否唯一？如果未必唯一，那么唯一的充要条件是什么？当不唯一时，这些准转移函数如何构造？它们有什么性质？

定义1.1　称$q(x)$——$q(x, A)$是一对q函数，$(x\in E, A\in\mathscr{E})$，如果：

(1) $0\leqslant q(x)<\infty$，$0\leqslant q(x, A)<\infty$，$(x\in E, A\in\mathscr{E})$；

(2) $q(\cdot)\in\mathscr{E}$，$q(\cdot, A)\in\mathscr{E}$，$(A\in\mathscr{E})$；

(3) $q(x, \cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度且$q(x, \{x\})=0$, $(x\in E)$;

(4) $q(x, E)\leqslant q(x)$, $(x\in E)$.

特别地，满足$q(x, E)=q(x)$, $(x\in E)$的q函数对称为保守的. 记$\tilde{q}(x, A)=q(x, A)-I_A(x)q(x)$, 有时亦称$\tilde{q}$为$q$函数.

定义1.2 设$q(x)$——$q(x, A)$是一对q函数，若标准准转移函数$P(t, x, A)$满足

$$\left(\frac{d}{dt}P(t, x, A)\right)_{t=0}=-q(x)I_A(x)+q(x, A),$$

$$(x\in E, A\in\mathscr{E}), \tag{1.1}$$

则称$P(t, x, A)$是一个q过程，若 $P(t, x, E)\equiv 1$，则称之为不断的.

为简单计，在不混淆的情况下，记$\frac{d}{dt}P(t, x, A)$为$P'(t, x, A)$.

设$q(x)-q(x, A)$ 是一对q函数，$\mathscr{L}$是第一编§1中所定义的Banach空间. 今定义二个算子Q^*和$^*Q$如下·记

$$\mathscr{D}^*=\left\{\varphi:\varphi\in\mathscr{L}, \quad \varphi=\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon_{x_i}(\cdot), \ c_i\text{实数}, \ x_i\in E, \right.$$
$$\left. n\geqslant 1\right\},$$

$$^*\mathscr{D}=\{\varphi:\varphi\in\mathscr{L}, \quad \int|\varphi|(dx)q(x)<\infty\},$$

其中$\varepsilon_x(\cdot)$表测度值集中在$\{x\}$的概率测度.

在$\mathscr{D}^*$和$^*\mathscr{D}$上分别定义算子Q^*和$^*Q$如下:

任取 $\varphi\in\mathscr{D}^*$, $Q^*\varphi(A)=\int_E\varphi(dx)(q(x, A)-q(x)I_A(x))$,

$$(A\in\mathscr{E}),$$

任取 $\varphi\in{}^*\mathscr{D}$, $^*Q\varphi(A)=\int_E\varphi(dx)(q(x, A)-q(x)I_A(x))$,

$$(A \in \mathcal{E}).$$

显然$Q^* \subset {}^*Q$.

命题1.1 设$P(t, x, A)$是任一标准准转移函数，$\Psi(\lambda, x, A)$是其拉氏变换，$q(x)$——$q(x, A)$ 是一对q函数，则下列陈述等价：

(1) $$P'(t, x, A) = -q(x)P(t, x, A) + \int_E q(x, dy)P(t, y, A), \qquad (B)$$

$$(t \in \boldsymbol{T}, x \in E, A \in \mathcal{E});$$

(2) $$P(t, x, A) = e^{-q(x)t}I_A(x) + \int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\left[\int_E q(x, dy)P(s, y, A)\right]ds, \qquad (B)'$$

$$(t \in \boldsymbol{T}, x \in E, A \in \mathcal{E});$$

(3) $$(\lambda + q(x))\Psi(\lambda, x, A) - \int_E q(x, dy)\Psi(\lambda, y, A) = I_A(x), \qquad (B_\lambda)$$

$$(\lambda > 0, x \in E, A \in \mathcal{E});$$

(4) $Q^* \subset \boldsymbol{A}$,($\boldsymbol{A}$是半群$\{V_t : t \in \boldsymbol{T}\}$之无穷小算子，$V_t$的定义见第一编(4.2))

(5) $$\lim_{t \to 0+} \frac{P(t, x, A) - I_A(x)}{t} = -q(x)I_A(x) + q(x, A),$$

$$(x \in E, A \in \mathcal{E});$$

(6) $$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda\Psi(\lambda, x, A) - I_A(x)) = -q(x)I_A(x) + q(x, A),$$

$$(x \in E, A \in \mathcal{E})$$

证：(1) $\Longrightarrow$ (2)。设(1)成立，用分部积分可得：

$$\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}P'(s, x, A)ds$$

$$= P(t, x, A) - e^{-q(x)t}I_A(x) - \int_0^t q(x)e^{-q(x)(t-s)}P(s, x, A)ds,$$

以(B)代入上式即得$(B)'$。

$(2)\Longrightarrow(3)$。设(2)成立。把$(B)'$对t取拉氏变换即得：

$$\Psi(\lambda,\ x,\ A)=\frac{I_A(x)}{\lambda+q(x)}$$

$$+\int_0^\infty dt\left(e^{-\lambda t}\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\left[\int_E q(x,\ dy)P(s,y,A)\right]ds\right)$$

$$=\frac{I_A(x)}{\lambda+q(x)}+\int_E q(x,\ dy)\int_0^\infty ds\left(\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda+q(x)}P(s,\ y,A)\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda+q(x)}\left(I_A(x)+\int_E q(x,\ dy)\Psi(\lambda,\ y,\ A)\right).$$

此即(3)成立。

$(3)\Longrightarrow(4)$。设(3)成立，由于$\boldsymbol{A}$是线性算子，所以为证$Q^*\subset\boldsymbol{A}$，只须证明对任何$x\in E$，有

$$\varepsilon_x(\cdot)\in\mathscr{D}_A,\ Q^*\varepsilon_x=\boldsymbol{A}\varepsilon_x,$$

（其中$\mathscr{D}_A$表$\boldsymbol{A}$之定义域）。

事实上，若令$\psi_x=Q^*\varepsilon_x$，则由(3)可得：

$$(\Psi_\lambda^*(\lambda\varepsilon_x-\psi_x))(A)$$

$$=\int_0^\infty dt\int_E(\lambda\varepsilon_x(dy)-\psi_x(dy))P(t,\ y,\ A)e^{-\lambda t}$$

$$=\int_0^\infty dt\left(e^{-\lambda t}\left[\lambda P(t,\ x,\ A)-\int_E(q(x,\ dy)\right.\right.$$

$$\left.\left.-q(x)\varepsilon_x(dy))P(t,\ y,\ A)\right]\right)$$

$$=\int_0^\infty dt\left(\left[(\lambda+q(x))P(t,\ x,\ A)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_E q(x,\ dy)P(t,\ y,\ A)\right]e^{-\lambda t}\right)$$

$$=(\lambda+q(x))\Psi(\lambda,\ x,\ A)-\int_E q(x,\ dy)\Psi(\lambda,\ y,\ A)$$

$$=I_A(x)=\varepsilon_x(A)$$

（其中Ψ_λ^*是半群$\{V_t:t\in\mathscr{T}\}$的位势算子）。

但是由第一编定理6.2，$\{V_t: t\in\mathbf{T}\}$是$\mathscr{L}$上的强连续半群，故其预解算子之定义域是$\mathscr{L}$，再用第一编命题4.1知Ψ_λ^*就是其预解算子。所以Ψ_λ^*是一对一的且$(\Psi_\lambda^*)^{-1}=(\lambda I-\boldsymbol{A})$，因此

$$\varepsilon_x\in\mathscr{D}_A,\ 且\lambda\varepsilon_x-\psi_x=(\Psi_\lambda^*)^{-1}\varepsilon_x=(\lambda I-\boldsymbol{A})\varepsilon_x,$$

此即

$$\varepsilon_x\in\mathscr{D}_A\ 且\boldsymbol{A}\varepsilon_x=\psi_x=Q^*\varepsilon_x.$$

故(4)成立。

(4)$\Longrightarrow$(5)。设(4)成立，则

$$\lim_{t\to0+}\left\|\frac{V_t\varepsilon_x-\varepsilon_x}{t}-Q^*\varepsilon_x\right\|$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\|\frac{V_t\varepsilon_x-\varepsilon_x}{t}-\boldsymbol{A}\varepsilon_x\right\|=0,$$

更有：

$$\lim_{t\to0+}\left|\frac{P(t,\ x,\ A)-I_A(x)}{t}-(q(x,\ A)-q(x)I_A(x))\right|$$

$$=\lim_{t\to0+}\left|\left(\frac{V_t\varepsilon_x-\varepsilon_x}{t}-Q^*\varepsilon_x\right)(A)\right|=0.$$

此即(5)成立。

(5)$\Longrightarrow$(6)。设(5)成立，则任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得：

$$|P(t,\ x,\ A)-I_A(x)-t(q(x,\ A)-q(x)I_A(x))|<\varepsilon t,$$
$$(0<t\leqslant\delta),$$

所以，若注意

$$\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}dt=\int_0^\infty\lambda^2te^{-\lambda t}dt=1$$

则可得

$$|\lambda\Psi(\lambda,\ x,\ A)-I_A(x))-(q(x,\ A)-q(x)I_A(x))|$$

$$=\left|\int_0^\infty\lambda^2e^{-\lambda t}(P(t,\ x,\ A)-I_A(x)-t(q(x,\ A)\right.$$
$$\left.-I_A(x)q(x)))dt\right|$$

$$\leqslant\int_0^\delta \lambda^2 e^{-\lambda t}\varepsilon t dt+\int_\delta^\infty \lambda^2 e^{-\lambda t}(2+2tq(x))dt$$

$$\leqslant\varepsilon+\lambda^2\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(2+2q(x)t)dt,$$

在上式中先令$\lambda\to\infty$，次令$\varepsilon\to 0$即得(6)。

(5)$\Longrightarrow$(1)，设(5)成立。

(a) 当$t\geqslant 0$，$\Delta t>0$时有：

$$\frac{P(t+\Delta t,\ x,\ A)-P(t,x,A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E\left(\frac{P(\Delta t,x,dy)-P(0,x,dy)}{\Delta t}\right)P(t,\ y,\ A),$$

由(5)并用第一编引理7.3即得：

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(t+\Delta t,\ x,\ A)-P(t,\ x,\ A)}{\Delta t}$$

$$=-q(x)P(t,\ x,\ A)+\int_E q(x,\ dy)p(t,\ y,\ A).$$

(b) 当$t>0$，$\Delta t>0$，$t-\Delta t>0$时，仿(a)，仍用(5)及第一编引理7.3可得：

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{p(t,\ x,\ A)-p(t-\Delta t,x,A)}{\Delta t}$$

$$=-q(x)p(t,x,A)+\int_E q(x,dy)p(t,y,A).$$

(6)$\Longrightarrow$(3)。设(6)成立。由 $\Psi(\lambda,\ x,\ A)$ 满足预解方程式得：

$$\int\lambda\Psi(\lambda,\ x,\ dy)(I_A(y)-\mu\Psi(\mu,\ y,\ A))$$

$$=\int\lambda(\varepsilon_x(dy)-\lambda\Psi(\lambda,\ x,\ dy))\Psi(\mu,\ y,\ A).\qquad(1.2)$$

但是

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi(\lambda,\ x,\ A)=\varepsilon_x(A),\qquad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\varepsilon_x(A)-\lambda\Psi(\lambda,\ x,\ A))$$
$$=-q(x,\ A)+q(x)\varepsilon_x(A),\quad (x\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$
又因为
$$|\varepsilon_y(A)-\mu\Psi(\mu,\ y,\ A)|\leqslant 2\quad (y\in E,\ A\in\mathscr{E},\ \mu>0),$$
$$|\Psi(\mu,\ y,\ A)|\leqslant\frac{1}{\mu},\quad (\mu>0,\ y\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$
所以用第一编引理7.3在(1.2)中令$\lambda\to\infty$即得(3)。

系1 若$P(t,\ x,\ A)$是q过程，则$\{V_t,\ t\in\boldsymbol{T}\}$的位势算子族与预解式一样。

命题1.2 设$P(t,\ x,\ A)$是任一q过程，$\Psi(\lambda,\ x,\ A)$是其拉氏变换。若对任何$\mu\in\mathscr{D}_A$，有
$$\int_E|\mu|(dx)q(x)<\infty,$$
则下列结论成立。

(1) $$\frac{d}{dt}P(t,\ x,\ A)=\int_E P(t,\ x,\ dy)(q(y,\ A)-I_A(y)q(y)),\tag{F}$$
$(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(2) $$P(t,\ x,\ A)=I_A(x)e^{-q(x)t}+\int_0^t ds\int_E P(s,\ x,\ dy)(q(y,\ A)-I_A(y)q(y))e^{-q(x)(t-s)}+\int_0^t ds(e^{-q(x)(t-s)}q(x)P(s,\ x,\ A)),\tag{F$'$}$$
$(t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(3) $$\int_E\Psi(\lambda,\ x,\ dy)(\lambda I_A(y)-[q(y,\ A)-I_A(y)q(y)])=I_A(x),\tag{F$_1$}$$
$(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(4) $\mathscr{A}\subset{}^*Q$。

证：(1) 固定$t\geqslant 0$，$\Delta t>0$，有

$$\frac{1}{\Delta t}(P(t+\Delta t,\ x,\ A)-P(t,\ x,\ A))$$

$$=\int_E P(t,\ x,\ dy)\frac{P(\Delta t,\ y,\ A)-I_A(y)}{\Delta t},$$

由第一编定理7.1有

$$1-P(t,\ x,\ \{x\})\leqslant 1-e^{-q(x)t},$$

所以

$$\left|\frac{P(\Delta t,\ y,\ A)-I_A(y)}{\Delta t}\right|\leqslant q(y),$$

再用命题1.1及第一编命题3.2，对任何$t\geqslant 0$，$x\in E$，有$P(t,x,\cdot)=V_t\varepsilon_x\in\mathscr{D}_A$，因此由命题假设知

$$\int_E P(t,\ x,\ dy)q(y)<\infty.$$

所以由控制收敛定理可得：

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t}(P(t+\Delta t,\ x,\ A)-P(t,\ x,\ A))$$

$$=\int_E P(t,\ x,\ dy)(q(y,\ A)-I_A(y)q(y)).$$

再用命题1.1知$\frac{d}{dt}P(t,\ x,\ A)$是存在的，所以

$$\frac{d}{dt}P(t,\ x,\ A)=\int_E P(t,\ x,\ dy)(q(y,\ A)$$

$$-I_A(y)q(y)).$$

(1)$\Longrightarrow$(2)。设(1)成立。应用分部积分可得：

$$\int_0^t ds\left[e^{-q(x)(t-s)}\frac{d}{ds}P(s,\ x,\ A)\right]$$

$$=P(t,\ x,\ A)-I_A(x)e^{-q(x)t}$$

$$-\int_0^t q(x)e^{-q(x)(t-s)}P(s,\ x,\ A)ds.$$

但是，由(1)还有：

$$\int_0^t ds\left[e^{-q(x)(t-s)}\frac{d}{ds}P(s,\ x,\ A)\right]$$

$$=\int_0^t ds\int_E P(s,\ x,\ dy)(q(y,\ A)-I_A(y)\,q(y))e^{-q(x)(t-s)}.$$

比较上述两式即得(2)。

(2)⟹(3)。设(F)′成立。(F)′左端之拉氏变换为$\Psi(\lambda,\ x,\ A)$，右端之拉氏变换为：

$$\frac{I_A(x)}{\lambda+q(x)}+\int_0^\infty dt\int_0^t ds\int_E P(s,\ x,\ dy)[e^{-q(x)(t-s)-\lambda t}(q(y,A)$$

$$-I_A(y)q(y))]$$

$$+\int_0^\infty dt\int_0^t ds[e^{-q(x)(t-s)-\lambda t}q(x)P(s,\ x,\ A)]$$

$$=\frac{I_A(x)}{\lambda+q(x)}+\int_0^\infty ds\int_s^\infty dt\int_E P(s,x,dy)[e^{-q(x)(t-s)-\lambda t}(q(y,A)$$

$$-I_A(y)q(y))]$$

$$+\int_0^\infty ds\int_s^\infty dt[e^{-q(x)(t-s)-\lambda t}q(x)P(s,\ x,\ A)]$$

$$=\frac{I_A(x)}{\lambda+q(x)}+\int_0^\infty ds\int_E P(s,\ x,\ dy)e^{-\lambda s}\frac{q(y,\ A)-I_A(y)q(y)}{\lambda+q(x)}$$

$$+\int_0^\infty ds\left(q(x)P(s,\ x,\ A)e^{-\lambda s}\frac{1}{\lambda+q(x)}\right)$$

$$=\frac{I_A(x)}{\lambda+q(x)}+\int_E\Psi(\lambda,\ x,\ dy)\frac{q(y,\ A)-I_A(y)q(y)}{\lambda+q(x)}$$

$$+q(x)\Psi(\lambda,\ x,\ A)/(\lambda+q(x)).$$

所以，由(F)′即得(F_λ)。

(3)⟹(4)。任取$\varphi\in\mathscr{D}_A$，由命题假设知$\varphi\in{}^*\mathscr{D}$，往证：$A\varphi$

$= {}^*Q\varphi$. 因为$(\lambda I - \boldsymbol{A})^{-1} = \Psi_\lambda^*$，所以，必存在$\eta \in \mathscr{L}$，使$\varphi = \Psi_\lambda^* \eta$。令$\eta = \eta_1 - \eta_2$，$\eta_i$都是$\mathscr{E}$上的有限测度，再令$\varphi_i = \Psi_\lambda^* \eta_i$，$(i = 1, 2)$，则$\varphi_i$亦是$\mathscr{E}$上的有限测度，且$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$。由(3)有

$$\int_E \varphi_i(dx) q(x, A) = \int_E \eta_i(dx) \int_E \Psi(\lambda, x, dy) q(y, A)$$

$$= \int_E \eta_i(dx) \left[\int_E \Psi(\lambda, x, dy)((\lambda + q(y)) I_A(y)) - I_A(x) \right]$$

$$= -\eta_i(A) + \int_E \varphi_i(dx)(\lambda + q(x)) I_A(x)$$

$$= (\boldsymbol{A}\varphi_i)(A) + \int_E \varphi_i(dx) q(x) I_A(x).$$

由$\varphi \in {}^*\mathscr{D}$知

$$\int_E |\varphi|(dx) q(x) < \infty,$$

更有

$$\int_E \varphi_i(dx) q(x) < \infty,$$

所以在前式两边可以减去

$$\int_E \varphi_i(dx) q(x) I_A(x).$$

减去后即得：

$$(\boldsymbol{A}\varphi_i)(A) = \int_E \varphi_i(dx)(q(x, A) - I_A(x) q(x))$$

$$= ({}^*Q\varphi_i)(A), \quad (i = 1, 2).$$

故

$$(\boldsymbol{A}\varphi)(A) = ({}^*Q\varphi)(A).$$

(4)得证．命题证毕．

定理1.1 任给一对q函数$q(x)$—$q(x, A)$，恒存在一个最小的q过程$\bar{P}(t, x, A)$（所谓$\bar{P}(t, x, A)$是最小的q过程，意即它是q过程，且对任何q过程$P(t, x, A)$来说，有$P(t, x, A) \geq \bar{P}(t, x, A)$，对一

切t,x,A)。

证：令$P^{(0)}(t,x,A)=e^{-q(x)t}I_A(x)$,

$$P^{(n+1)}(t,x,A)=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\left(\int_E q(x,dy)P^{(n)}(s,y,A)\right)ds,\quad (n\geqslant 0),$$

$$\bar{P}(t,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(t,x,A),$$

可证$\bar{P}(t,x,A)$即为所求。

(1) 显然$P^{(0)}(t,x,A)$是t的连续函数(固定x和A)，是x的$\mathscr{E}$可测函数(固定t，A)，是$\mathscr{E}$上的有限测度(固定t,x)。对n作归纳法可以证明对任何$n\geqslant 0$，$P^{(n)}(t,x,A)$均具有上述性质。

(2) 显然对一切$t\in\boldsymbol{T}$,$x\in E$,$A\in\mathscr{E}$,有$0\leqslant P^{(0)}(t,x,A)\leqslant 1$，对$n$作归纳法可以证明：对一切$n\geqslant 0$,恒有$0\leqslant\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(t,x,E)\leqslant 1$，从而$0\leqslant\bar{P}(t,x,E)\leqslant 1$。由(1)得知$\bar{P}(t,x,A)$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数。又因为$P^{(n)}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度，所以，$\bar{P}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的具有有限可加性的集合函数，用控制收敛定理可以证明："$A_n\supset A_{n+1}$，$\bigcap_n A_n=\varnothing\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\bar{P}(t,x,A_n)=0$."所以$\bar{P}(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度。

(3) $\bar{P}(t,x,A)$满足(K—C)方程式. 首先注意，对n作归纳法可以证明：

$$P^{(n)}(s+t,x,A)=\sum_{\nu=0}^{n}\int_E P^{(\nu)}(s,x,dy)P^{(n-\nu)}(t,x,A). \tag{1.3}$$

由(1.3)及第一编引理7.3得：

$$\bar{P}(s+t,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\int_E P^{(\nu)}(s,x,dy)P^{(n-\nu)}(t,y,A)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{E} P^{(\nu)}(s,x,dy)\,\bar{P}(t,y,A)$$

$$= \int_{E} \bar{P}((s,x,dy)\bar{P}(t,y,A).$$

(4) 显然，

$$\bar{P}(t,x,A) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(t,x,A)$$

$$= P^{(0)}(t,x,A) + \int_0^t e^{-q(x)(t-s)}$$

$$\left(\int q(x,\ dy)\bar{P}(s,y,A)\right)ds, \qquad (1.4)$$

所以

$$\lim_{t\to 0^+} \bar{P}(t,x,A) = \lim_{t\to 0^+} P^{(0)}(t,x,A) = I_A(x)$$

总上四步，可知$\bar{P}(t,x,A)$是标准准转移函数。所以由第一编定理5.1知$\bar{P}(\cdot,x,A)$是连续函数，用（1.4）并使用中值公式与控制收敛定理可以证明$\bar{P}(t,x,A)$是q过程。

(5) 设$P(t,x,A)$是任一q过程，由命题1.1有：

$$P(t,x,A) = P^{(0)}(t,\ x,\ A) + \int_0^t e^{-q(x)(t-s)}$$

$$\left(\int_E q(x,dy)P(s,y,A)\right)ds,$$

若注意$P^{(n+1)}(t,x,A)$之定义，用上式，并对n作归纳法可证，

$$P(t,x,A) \geqslant \sum_{\nu=0}^{n} P^{(\nu)}(t,x,A),\ (n\geqslant 0),$$

从而$P(t,x,A)\geqslant\bar{P}(t,x,A)$。定理证毕。

§2 拉氏变换

命题2.1 设$P(t,x,A)$是一个q过程，$\Psi(\lambda,x,A)$是其拉氏变换，则

(1) $p'(t,x,A)$的拉氏变换为

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}p'(t,x,A)dt=\lambda\Psi(\lambda,x,A)-I_A(x).$$

(2) $p'(t,x,A)+q(x)p(t,x,A)-\int_E q(x,dy)p(t,y,A)$的拉氏变换为

$$(\lambda+q(x))\Psi(\lambda,x,A)-\int_E q(x,dy)\Psi(\lambda,y,A)-I_A(x).$$

(3) 设$P^{(n)}(t,x,A)$如定理1.1所定义，$\Psi^{(n)}(\lambda,x,A)$是其拉氏变换，再令

$$\pi^{(0)}(\lambda,x,A)=I_A(x),\ \ \pi(\lambda,x,A)=q(x,A)/(\lambda+q(x)),$$

$$\pi^{(n)}(\lambda,x,A)=\int_E\pi^{(n-1)}(\lambda,x,dy)\pi(\lambda,y,A),(n\geqslant 1),$$

恒有：

$$\Psi^{(0)}(\lambda,x,A)=I_A(x)/(\lambda+q(x)),$$

$$\Psi^{(n+1)}(\lambda,x,A)=\frac{1}{\lambda+q(x)}\int_E q(x,dy)\Psi^{(n)}(\lambda,y,A)$$

$$=\int_E\pi(\lambda,x,dy)\Psi^{(n)}(\lambda,y,A)$$

$$=\int_E\pi^{(n+1)}(\lambda,x,dy)\Psi^{(0)}(\lambda,y,A).$$

证： 直接计算可得(1)、(2)、(3).

命题2.2 设$\Psi(\lambda,x,A)$是标准准转移函数$p(t,x,A)$的拉氏变换，则

(1) $p(t,x,A)$是不断的(即$p(t,x,E)\equiv1$)充要条件是$\lambda\Psi(\lambda,x,E)\equiv1$, $(\lambda>0,\ x\in E)$.

(2) $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}(p(t,x,A)-I_A(x))$存在(不一定有限)$\Longrightarrow$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda,x,A)-I_A(x))=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}(p(t,x,A)-I_A(x)).$$

证 (1)由于$P(t,x,A)$是标准的，所以对$t\in\mathscr{T}$连续，再用拉氏变换之唯一性可得(1)。

(2) 先设$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-P(t,x,\{x\}))=q(x)<\infty$，

往证

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda,x,\{x\})-1)=-q(x).$$

事实上，由假设得知，对任何$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，使

$$|1-P(t,x,\{x\})-q(x)t|<\varepsilon t,\quad (0\leqslant t\leqslant\delta),$$

所以

$$|\lambda^2\Psi(\lambda,x,\{x\})-\lambda+q(x)|$$

$$=\left|\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}[P(t,x,\{x\})-1+q(x)t]dt\right|$$

$$\leqslant\varepsilon\int_0^\delta\lambda^2e^{-\lambda t}tdt+\lambda^2\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(1+q(x)t)dt$$

$$\leqslant\varepsilon+\lambda^2\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}(1+q(x)t)dt.$$

在上式中先令$\lambda\to\infty$，次令$\varepsilon\to 0$即得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda,x,\{x\})-1)=-q(x).$$

再设$\lim\limits_{t\to 0^+}(1-P(t,x,\{x\}))/t=\infty$，

可证 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda,x,\{x\}))=\infty$.

事实上，由假设得知：对任意大的M，恒存在一个$\delta>0$，使

$$1-P(t,x,\{x\})\geqslant Mt,\quad (0\leqslant t\leqslant\delta),$$

所以

$$\lambda-\lambda^2\Psi(\lambda,x,\{x\})$$

$$=\lambda^2\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-P(t,x,\{x\}))dt$$

$$\geqslant \lambda^2 \int_0^{\delta} e^{-\lambda t} M t dt = M \int_0^{\lambda \delta} s e^{-s} ds,$$

因此

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\lambda - \lambda^2 \Psi(\lambda, x, \{x\})) = \infty.$$

仿前两步，可证

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{P(t, x, A)}{t} = q(x, A), (x \overline{\in} A) \text{存在} \Longrightarrow$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \Psi(\lambda, x, A) = q(x, A).$$

命题证毕

定理2.1 任意给定$\Psi(\lambda, x, A)$ ($\lambda > 0$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$)，它是某一个标准准转移函数$P(t, x, A)$的拉氏变换的充要条件是：

(i) 固定λ, x, $\Psi(\lambda, x, \cdot)$是$\mathscr{E}$上一个有限测度，固定λ, A, $\Psi(\lambda, \cdot, A) \in b\mathscr{E}$；

(ii) $0 \leqslant \lambda \Psi(\lambda, x, A) \leqslant 1$, ($\lambda > 0$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$)；

(iii) 满足预解方程式，

$$\Psi(\lambda, x, A) - \Psi(\mu, x, A) + (\lambda - \mu) \int_E \Psi(\lambda, x, dy) \Psi(\mu, y, A)$$

$$= 0,$$

$$(\lambda > 0, \mu > 0, x \in E, A \in \mathscr{E});$$

(iv) 连续性条件：$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi(\lambda, x, A) = I_A(x)$, ($x \in E$, $A \in \mathscr{E}$)。

证：必要性 若$P(t, x, A)$是标准准转移函数，则$P(t, x, A)$对$t \in \mathscr{T}$连续，从而$P(t, x, A)$是可测的。因此由第一编命题4.1知(i)—(iii)成立。再用$P(t, x, A)$的标准性及控制收敛定理即得(iv)。

充分性 设$\mathscr{L}$是第一编§1中所定义的Banach空间。在$\mathscr{L}$上定义一族算子$\{\Psi_\lambda^*: \lambda > 0\}$如下：

任取$\varphi \in \mathscr{L}$，定义

$$(\Psi_\lambda^*\varphi)(B)=\int_E \varphi(dx)\psi(\lambda,x,B),(\lambda>0,B\in\mathscr{E}).$$

显然Ψ_λ^*: $\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{L}$，且$\psi_\lambda^*$是有界线性算子，$\|\Psi_\lambda^*\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$，$(\lambda>0)$.
如果还能证

(a) Ψ_λ^*是一对一的，则可以定义算子$\boldsymbol{A}_\lambda$如下：$(\lambda I-\boldsymbol{A}_\lambda)=(\Psi_\lambda^*)^{-1}$.

(b) $\boldsymbol{A}_\lambda=\boldsymbol{A}$与$\lambda>0$无关，且其定义域$\mathscr{D}_A$在$\mathscr{L}$中稠.

则由第一编定理 3.5 得知：存在唯一一个$\mathscr{L}$上的强连续的压缩型半群$\{V_t:\ t\in\boldsymbol{T}\}$，其预解算子为$\Psi_\lambda^*$，即是

$$\Psi_\lambda^*\varphi=(s)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}V_t\varphi dt,\quad(\varphi\in\mathscr{L}).$$

更有

$$(\Psi_\lambda^*\varphi)(B)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(V_t\varphi)(B)dt,(B\in\mathscr{E}).$$

取$\varphi_x(B)=I_B(x)$，$(B\in\mathscr{E})$，则$\varphi_x\in\mathscr{L}$，且$\varphi_x(B)$是x的$\mathscr{E}$可测函数。令$P(t,x,B)=(V_t\varphi_x)(B)$，往证$P(t,x,B)$即为所求。事实上，由第一编定理3.6有

$$(V_t\varphi_x)(B)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{m!}((tn\boldsymbol{A}\circ\Psi_n^*)^m\varphi_x)(B)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{m!}((tn^2\Psi_n^*-tnI)^m\varphi_x)(B)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\exp(tn^2\Psi_n^*-tnI)\varphi_x)(B).$$

由$\varphi_x(B)$及$(\Psi_\lambda^*\varphi_x)(B)=\Psi(\lambda,x,B)$均为$x$的$\mathscr{E}$可测函数得知$(tn\boldsymbol{A}\circ\Psi_n^*\varphi_x)(B)=((tn^2\Psi_n^*-tnI)\varphi_x)(B)$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数. 对$m$作归纳法可证：

$((tn\boldsymbol{A}\circ\Psi_n^*)^m\varphi_x)(B)$也是$x$的$\mathscr{E}$可测函数$(m\geqslant1)$，从而$P(t,x,B)$

$=(V_t\varphi_x)(B)$ 是x的 $\mathscr{E}$可测函数。又因为有界线性算子 $e^{-t\mu I}$ 和 $e^{t\mu^2\Psi^*_\mu}$都把$\mathscr{L}$中的测度映射为测度，而φ_x是测度，所以$V_t\varphi_x$是测度，亦即$p(t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的测度。而$\{V_t: t\in\boldsymbol{T}\}$是压缩型半群，所以 $p(t,x,E)=(V_t\varphi_x)(E)\leqslant 1$ 。又因为 $\{V_t: t\in\boldsymbol{T}\}$ 是强连续的，所以更有$p(t,x,B)=(V_t\varphi_x)(B)$是$t\in\boldsymbol{T}$ 的连续函数，而且

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}p(t,x,B)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(V_t\varphi_x)(B)dt$$

$$=(\Psi^*_\lambda\varphi_x)(B)=\Psi(\lambda,x,B),(\lambda>0,x\in E,B\in\mathscr{E}).$$

所以，如果我们能证明$p(t,x,B)$满足$(k-c)$方程式，则$p(t,x,A)$就是一个以$\Psi(\lambda,x,A)$为拉氏变换的标准准转移函数了。

事实上，由$p(t,x,B)$ 是$t\in\boldsymbol{T}$的连续函数，再用控制收敛定理及第一编引理7.3可知：$p(s+t,x,B)$，$\int_E p(s,x,dy)p(t,y,B)$ 均为s(固定t)和t(固定s)的连续函数，因此，

$$\int_0^\infty e^{-\mu t}p(s+t,x,B)dt,\quad \int_0^\infty e^{-\mu t}\left[\int_E p(s,x,dy)p(t,y,B)\right]dt$$

都是s的连续函数。但是

$$\int_0^\infty ds\int_0^\infty dt\int_E p(s,x,dy)p(t,y,B)e^{-\lambda s-\mu t}$$

$$=\int_E\Psi(\lambda,x,dy)\Psi(\mu,y,B)$$

$$=\frac{1}{\mu-\lambda}(\Psi(\lambda,x,B)-\Psi(\mu,x,B))$$

$$=\int_0^\infty ds\int_0^\infty dt\,p(s+t,x,B)e^{-\lambda s-\mu t},$$

所以两次利用拉氏变换之唯一性有

$$p(s+t,x,B)=\int_E p(s,x,dy)p(t,y,B)$$

$(s,t\in\boldsymbol{T},x\in E,B\in\mathscr{E})$。

总之，我们证明了$P(t,x,B)$是一个以$\Psi(\lambda,x,B)$为拉氏变换的标准准转移函数。

下面我们来补证(a)和(b)。

(a) Ψ_λ^*是一对一的算子。

任取$\varphi\in\mathscr{L}$，令$B_1=B_1(\lambda)$，$B_2=B_2(\lambda)$为$(\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi)$的一组Hahn分解(即是$B_1,B_2$分别为$(\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi)$的正、负集，$B_1\cap B_2=\varnothing$，$B_1\cup B_2=E$. 所谓$B$是$\varphi$之正(负)集，意即$B\in\mathscr{E}$，且$B'\subset B$，$B'\in\mathscr{E}\Longrightarrow\varphi(B')\geqslant 0(\varphi(B')\leqslant 0)$)，则有

$$
\begin{aligned}
\|\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi\| &= (\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi)(B_1)-(\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi)(B_2)\\
&=\int_E\varphi(dx)(I_{B_1}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_1))\\
&\quad-\int_E\varphi(dx)(I_{B_2}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_2))\\
&\leqslant\int_E|\varphi|(dx)|I_{B_1}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_1)|\\
&\quad+\int_E|\varphi|(dx)|I_{B_2}(x)-\lambda\Psi(\lambda,x,B_2)|,
\end{aligned}
$$

(其中$|\varphi|=\varphi^++\varphi^-$,$\varphi^+(B)=\varphi(BA_1)$,$\varphi^-(B)=-\varphi(BA_2)$,$A_1$和$A_2$为$\varphi$的一组正、负集.)．上式中令$\lambda\to\infty$并注意由(i)—(iv)可推出$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi(\lambda,x,A)=I_A(x)$ 对$A\in\mathscr{E}$等度成立及控制收敛定理可得：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\varphi-\lambda\Psi_\lambda^*\varphi\|=0$$

但是，由(iii)得知

$$\Psi_{\lambda_0}^*\varphi=0\Longrightarrow\Psi_\lambda^*\varphi=0(一切\lambda>0).$$

所以

$$\Psi_{\lambda_0}^*\varphi=0\Longrightarrow\varphi=(s)\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi_\lambda^*\varphi=0.$$

此即$\Psi_{\lambda_0}^*$是一对一的。($\mathscr{L}$中之0元素，亦用0表之.)$\lambda_0>0$可任意，故(a)得证。

(b) $\boldsymbol{A}_\lambda=\boldsymbol{A}$与$\lambda>0$无关，$\mathscr{D}_A$在$\mathscr{L}$中稠。

首先证明$\boldsymbol{A}_\lambda$之定义域与λ无关。任取$\varphi\in\mathscr{L}$，由(iii)有

$$\Psi_\mu^*\varphi=\Psi_\lambda^*(\varphi+(\lambda-\mu)\Psi_\mu^*\varphi),$$

$$\Psi_\lambda^*\varphi=\Psi_\mu^*(\varphi+(\mu-\lambda)\Psi_\lambda^*\varphi),$$

此即Ψ_λ^*与Ψ_μ^*之值域一样，从而$\boldsymbol{A}_\lambda$与$\boldsymbol{A}_\mu$之定义域一样。

其次证明：任取$\varphi\in\mathscr{D}_{A_\lambda^*}=\mathscr{D}_{A_\mu}$，有$\boldsymbol{A}_\lambda\varphi=\boldsymbol{A}_\mu\varphi$。事实上这时$\varphi$必属于$\Psi_\lambda^*$与$\Psi_\mu^*$的值域，所以存在$\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{L}$，使$\varphi=\Psi_\lambda^*\varphi_1=\Psi_\mu^*\varphi_2$。再用(iii)得：

$$\Psi_\lambda^*\varphi_1-\Psi_\mu^*\varphi_1+(\lambda-\mu)\Psi_\mu^*\circ\Psi_\lambda^*\varphi_1=0,$$

亦即

$$\Psi_\mu^*\varphi_2-\Psi_\mu^*\varphi_1+(\lambda-\mu)\Psi_\mu^*\circ\Psi_\lambda^*\varphi_1=0.$$

而Ψ_μ^*是一对一的算子，所以

$$\varphi_2-\varphi_1+(\lambda-\mu)\Psi_\lambda^*\varphi_1=0,$$

此即

$$(\Psi_\mu^*)^{-1}\varphi-(\Psi_\lambda^*)^{-1}\varphi+(\lambda-\mu)\varphi=0.$$

亦即

$$\boldsymbol{A}_\lambda\varphi=\boldsymbol{A}_\mu\varphi.$$

最后证明$\mathscr{D}_A$在$\mathscr{L}$中稠。事实上，在(a)的证明中已有：任取$\varphi\in\mathscr{L}$，必有$\varphi=(s)\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi_\lambda^*\varphi$，而$\lambda\Psi_\lambda^*\varphi\in\mathscr{D}_A$。这就说明了$\mathscr{D}_A$在$\mathscr{L}$中稠。

定理2.2 设$q(x)$—$q(x,A)$是任意一对q—函数，则$\Psi(\lambda,x,A)$是某个q过程的拉氏变换的充要条件是：定理2.1的(i)—(iii)成立及

$$\text{(iv)}^*\quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda,x,A)-I_A(x))=q(x,A)-q(x)I_A(x),$$

$$(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

证：必要性 由定理2.1及命题1.1即得。

充分性 首先注意(iv)*必蕴含了定理2.1中的条件(iv)，所以由定理2.1得知存在唯一一个标准转移函数$p(t,x,A)$，其拉

氏变换为$\Psi(\lambda,x,A)$。由(iv)*，再用命题1.1得知$P(t,x,A)$必为q过程。

定理2.3 设$q(x)$—$q(x,A)$是任意一对q函数，则$\Psi(\lambda,x,A)$是某个q过程的拉氏变换的充要条件是：定理2.1的(i)—(iii)成立及

$$(\lambda+q(x))\Psi(\lambda,x,A)-\int_E q(x,dy)\Psi(\lambda,y,A)=I_A(x), \tag{B_λ}$$

$$(\lambda>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E}).$$

证 若$\Psi(\lambda,x,A)$是某个标准转移函数的拉氏变换，则由命题1.1得知 (iv)*$\Longleftrightarrow(B_\lambda)$。故仿定理2.2可证定理2.3。

以后q过程的拉氏变换也称为q过程。

§3 空间$U_\lambda(s)$和$V_\lambda(s)$

本节恒设$q(x)$—$q(x,A)$是任意一对q函数，$P^{(n)}(t,x,A)$、$\bar{P}(t,x,A)$如定理1.1所定义，$\Psi^{(n)}(\lambda,x,A)$、$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$分别为$P^{(n)}(t,x,A)$、$\bar{P}(t,x,A)$的拉氏变换，$\bar{\xi}(\lambda,x)=1-\lambda\bar{\Psi}(\lambda,x,E)$，$S^{(n)}(\lambda,x,A)=\sum\limits_{k=0}^{n}\Psi^{(k)}(\lambda,x,A)$，$\pi(\lambda,x,A)$、$\pi^{(n)}(\lambda,x,A)$ $(n\geqslant 0)$ 如命题2.1所定义。

命题3.1 若$\xi,\eta\in b\mathscr{E}$，$\xi,\eta\geqslant 0$，且

$$(\mu+q(x))\xi(x)-\int_E q(x,dy)\xi(y)\geqslant\eta(x)\geqslant 0,$$

则有

$$\xi(x)\geqslant\int_E\bar{\Psi}(\mu,x,dy)\eta(y).$$

证 由假设有

$$\xi(x) \geqslant \int_E \pi(\mu, x, dy)\xi(y) + \int_E \Psi^{(0)}(\mu, x, dy)\eta(y),$$

更有

$$\xi(x) \geqslant \int_E \Psi^{(0)}(\mu, x, dy)\eta(y).$$

反复地利用上述二不等式得：

$$\xi(x) \geqslant \int_E \pi(\mu, x, dy) \int_E \Psi^{(0)}(\mu, y, dz)\eta(z)$$

$$+ \int_E \Psi^{(0)}(\mu, x, dy)\eta(y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi(x) \geqslant \int_E \left(\sum_{k=0}^{n} \pi^{(k)}(\mu, x, dy) \right) \int_E \Psi^{(0)}(\mu, y, dz)\eta(z)$$

$$= \int_E S^{(n)}(\mu, x, dy)\eta(y).$$

令 $n \to \infty$ 即得命题3.1。

命题3.2 令$M(\lambda, \mu, x, A) = I_A(x) + (\lambda - \mu)\bar{\Psi}(\mu, x, A)$，再令

$$U_\lambda(s) = \left\{ \xi(\lambda, x) \middle| \begin{array}{l} \int_E q(x, dy)\xi(\lambda, y) = (\lambda + q(x))\xi(\lambda, x), \\ \xi(\lambda, \cdot) \in b\mathscr{E}, \ \xi \geqslant 0. \end{array} \right\},$$

则"$\xi(\lambda, x) \in U_\lambda(s) \Rightarrow \xi(\mu, x) = \int_E M(\lambda, \mu, x, dy)\xi(\lambda, y) \in U_\mu(s)$"。

证：设 $\xi(\lambda, x) \in U_\lambda(s)$。

先证 $\xi(\mu, x) \geqslant 0$，$(\mu > 0,\ x \in E)$。当 $\lambda \geqslant \mu$ 时，此事显然成立。若 $\lambda < \mu$，则由 $\xi(\lambda, x) \in U_\lambda(s)$ 得

$$(\mu + q(x))\xi(\lambda, x) - \int_E q(x, dy)\xi(\lambda, y) = (\mu - \lambda)\xi(\lambda, x)$$

$$\geqslant 0.$$

所以，由命题3.1得：

$$\xi(\lambda, x) \geqslant (\mu - \lambda)\int_E \bar{\Psi}(\mu, x, dy)\xi(\lambda, y).$$

因此，

$$\xi(\mu,x)=\int_E M(\lambda,\mu,x,dy)\xi(\lambda,y)$$

$$=\xi(\lambda,x)+(\lambda-\mu)\int_E \bar{\Psi}(\mu,x,dy)\xi(\lambda,y)\geqslant 0.$$

次证 $\xi(\mu,\cdot)\in b\mathscr{E}$. 事实上，$\xi(\lambda,\cdot)\in b\mathscr{E}$, $M(\lambda,\mu,\cdot,A)\in b\mathscr{E}$, 故$\xi(\mu,\cdot)\in b\mathscr{E}$.

最后，由于$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足（B_λ）可得：

$$\int_E q(x,\ dy)\int_E M(\lambda,\mu,y,d\xi)\xi(\lambda,z)$$

$$=(\lambda+q(x))\xi(\lambda,x)$$

$$+(\lambda-\mu)\int_E[\bar{\Psi}(\mu,x,dy)(\mu+q(x))-\varepsilon_x(dy)]\xi(\lambda,y)$$

$$=(\mu+q(x))(\xi(\lambda,x)+(\lambda-\mu)\int_E \bar{\Psi}(\mu,x,dy)\xi(\lambda,y))$$

$$=(\mu+q(x))\int_E M(\lambda,\mu,x,dy)\xi(\lambda,y).$$

（$\varepsilon_x(\cdot)$表测度值集中在$\{x\}$一点的概率测度。）

总上三步即得命题3.2.

定义3.1 称$U_\lambda(s)$ 中的极大线性无关函数组中函数的个数为$U_\lambda(s)$ 的维数，记作 $dimU_\lambda(s)$.

命题3.3 $U_\lambda(s)$ 中的维数 $dimU_\lambda(s)$ 不依赖$\lambda>0$.

证： 若 $\xi_1(\lambda,x),\cdots,\xi_k(\lambda,x)\in U_\lambda(s)$，而且它们线性无关，则由命题3.2得知：

$$\xi_i(\mu,x)\equiv\int_E M(\lambda,\mu,x,dy)\xi_i(\lambda,y)\in U_\mu(s),$$

$$(i=1,\cdots,k),$$

所以，若能证明$\xi_i(\mu,x)$ $(i=1,\cdots,k)$也线性无关，则命题3.3得证. 事实上，若

$$\sum_{i=1}^k c_i\xi_i(\mu,x)\equiv 0,\ (x\in E),$$

则

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i(\lambda,x) = \int_E M(\mu,\lambda,x,dy) \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i(\mu,y) = 0.$$

由 $\{\xi_i(\lambda,x),\ i=1,\cdots,k\}$线性无关得知 $c_i=0$，$(i=1,\cdots,k)$，故 $\{\xi_i(\mu,x),\ i=1,\cdots,k\}$亦线性无关。

命题3.4 设 φ,ψ 是 $\mathscr{E}$ 上二个有限测度，且

$$\int_E \varphi(dx)[\lambda I_A(x) - (q(x,A) - q(x)I_A(x))] \geqslant \psi(A),$$

$$(A \in \mathscr{E}),$$

$$\int_E \varphi(dx) q(x) < \infty,$$

则 $$\varphi(A) \geqslant \int_E \psi(dx) \bar{\Psi}(\lambda,x,A),\quad (\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}).$$

证： 由命题假设有

$$\int_E \varphi(dx) \int_E [\lambda \varepsilon_x(dy) - (q(x,dy)$$

$$- q(x)\varepsilon_x(dy))] \Psi^{(0)}(\lambda,y,A)$$

$$\geqslant \int_E \psi(dx) \Psi^{(0)}(\lambda,x,A),$$

注意 $\Psi^{(0)}(\lambda,x,A) = I_A(x)/(\lambda+q(x))$，上式即：

$$\varphi(A) \geqslant \int_E \psi(dx) \Psi^{(0)}(\lambda,x,A)$$

$$+ \int_E \varphi(dx) \int_E q(x,dy) \Psi^{(0)}(\lambda,y,A). \quad (3.1)$$

更有

$$\varphi(A) \geqslant \int_E \psi(dx) \Psi^{(0)}(\lambda,x,A). \quad (3.2)$$

反复利用（3.1）及（3.2）有：

$$\varphi(A) \geqslant \int_E \psi(dx) \Psi^{(0)}(\lambda,x,A)$$

$$+\int_E \psi(dx)\int_E \Psi^{(0)}(\lambda,x,dy)\int_E q(y,dz)\Psi^{(0)}(\lambda,z,A)$$

$$=\int_E \psi(dx)\int_E (\pi^{(0)}(\lambda,x,dy)$$

$$+\pi^{(1)}(\lambda,x,dy))\Psi^{(0)}(\lambda,y,A),$$

……………………………

$$\varphi(A)\geqslant\int_E \psi(dx)\int_E \left(\sum_{k=0}^{n}\pi^{(k)}(\lambda,x,dy)\right)\Psi^{(0)}(\lambda,y,A). \tag{3.3}$$

在 (3.3) 中令 $n\to\infty$ 并注意

$$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi^{(k)}(\lambda,x,A)$$

$$=\int_E \sum_{k=0}^{\infty}\pi^{(k)}(\lambda,x,dy)\Psi^{(0)}(\lambda,y,A)$$

即得

$$\varphi(A)\geqslant\int_E \psi(dx)\bar{\Psi}(\lambda,x,A).$$

命题3.5 $\sum_{n=0}^{\infty}\pi^{(n)}(\lambda,x,E)<\infty$ 的充要条件是 $\int_E \bar{\Psi}(\lambda,x,dy)\cdot q(y)<\infty$，而且此时 $\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足

$$\int_E \bar{\Psi}(\lambda,x,dy)(\lambda I_A(y)-(q(y,A)-q(y)I_A(y)))$$

$$=I_A(x). \tag{F_1}$$

证： 因为

$$\int_E \bar{\Psi}(\lambda,x,dy)(\lambda+q(y))I_A(y)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \Psi^{(n)}(\lambda,x,dy)(\lambda+q(y))I_A(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy) \int_E \Psi^{(0)}(\lambda, y, dz)(\lambda + q(z)) I_A(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy) I_A(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{(n)}(\lambda, x, A), \quad (3.4)$$

而且

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{(n)}(\lambda, x, A) = I_A(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{(n)}(\lambda, x, A)$$

$$= I_A(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy) \pi(\lambda, y, A)$$

$$= I_A(x) + \int_E \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{(n)}(\lambda, x, dy) \int_E \Psi^{(0)}(\lambda, y, dz) q(z, A)$$

$$= I_A(x) + \int_E \bar{\Psi}(\lambda, x, dy) q(y, A). \quad (3.5)$$

由上述二式即得命题3.5。

令

$$V_\lambda(s) = \left\{ \varphi_\lambda : \begin{array}{l} \int_E \varphi_\lambda(dx)[\lambda I_A(x) - (q(x, A) - q(x) I_A(x))] = 0, \\ \varphi_\lambda \text{是}\mathscr{E}\text{上的有限测度}, \ \int_E \varphi_\lambda(dx) q(x) < \infty \end{array} \right\}.$$

命题3.6 若$\sup_{x \in E} \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{(n)}(\lambda, x, E) < \infty$，$(\lambda > 0)$，

取 $\varphi_\lambda \in V_\lambda(s)$，令

$$\varphi_\mu(A) = \int_E \varphi_\lambda(dx) M(\lambda, \mu, x, A), \ (\mu > 0, \ A \in \mathscr{E}).$$

则 $\varphi_\mu \in V_\mu(s)$。

证：(1) 显然 $\varphi_\mu \in \mathscr{L}$。若 $\lambda \geqslant \mu$，由 φ_μ 之定义得 φ_μ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度。若 $\lambda < \mu$，则由 $\varphi_\lambda \in V_\lambda(s)$ 有：

$$\int_E \varphi_\lambda(dx)[\mu I_A(x) - (q(x, A) - q(x) I_A(x))]$$

$$=(\mu-\lambda)\varphi_\lambda(A)\geqslant 0.$$

所以，由命题3.4有

$$\varphi_\lambda(A)\geqslant\int_E(\mu-\lambda)\varphi_\lambda(dx)\bar{\Psi}(\mu,x,A). \tag{3.6}$$

因此，

$$\varphi_\mu(A)=\int_E\varphi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A)$$

$$=\varphi_\lambda(A)+(\lambda-\mu)\int_E\varphi_\lambda(dx)\bar{\Psi}(\mu,x,A)\geqslant 0.$$

所以，无论如何，φ_μ 都是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度。

(2) 可证$\int_E\varphi_\mu(dx)q(x)<\infty$。

因为

$$\varphi_\mu(A)=\varphi_\lambda(A)+(\lambda-\mu)\int_E\varphi_\lambda(dx)\bar{\Psi}(\mu,x,A),$$

而由命题假设及（3.4）有

$$\sup_{x\in E}\int_E\Psi(\mu,x,dy)q(y)<\infty\quad(\mu>0)$$

所以由$\int_E\varphi_\lambda(dx)q(x)<\infty$可得 $\int_E\varphi_\mu(dx)q(x)<\infty$。

(3) 由(2)并注意$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足（F_λ）及$\varphi_\lambda\in V_\lambda(s)$可得，

$$\int_E\varphi_\mu(dx)[\mu I_A(x)-(q(x,A)-q(x)I_A(x))]$$

$$=\int_E\varphi_\lambda(dx)\ (\int_E M(\lambda,\mu,x,dy)[\mu I_A(y)-(q(y,A)$$

$$-q(y)I_A(y))])$$

$$=\int_E\varphi_\lambda(dx)(\mu I_A(x)-(q(x,A)-q(x)I_A(x))$$

$$+(\lambda-\mu)I_A(x))$$

$$=0.$$

总上三步得 $\varphi_\mu\in V_\mu(s)$。

定义3.2 设$\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in\mathscr{L}$，称$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是线性无关的，如果

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(A)=0,\ (A\in\mathscr{E})\Rightarrow c_i=0,\ (i=1,\cdots,n).$$

$V_\lambda(s)$ 中极大线性无关测度组中测度的个数v_λ称为 $V_\lambda(s)$ 的维数，记之为$dimV_\lambda(s)$。

命题3.7 若 $\sup\limits_{x\in E}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\pi^{(n)}(\lambda,x,E)<\infty$，$(\lambda>0)$，则 $V_\lambda(s)$ 的维数v_λ不依赖$\lambda>0$。

证： 令

$\varphi_\lambda^{(i)}\in V_\lambda(s)$，$\{\varphi_\lambda^{(i)}:i=1,\cdots,n\}$线性无关，

$\varphi_\mu^{(i)}(A)=\int_E\varphi_\lambda^{(i)}(dx)M(\lambda,\mu,x,A)$，$(A\in\mathscr{E})$，

由命题3.6知$\varphi_\mu^{(i)}\in V_\mu(s)$。若

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_\mu^{(i)}(A)=0,\ (A\in\mathscr{E}),$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_\lambda^{(i)}(A)=\int_E\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_\mu^{(i)}(dx)M(\mu,\lambda,x,A)=0.$$

由$\{\varphi_\lambda^{(i)}:i=1,\cdots,n\}$线性无关得$c_i=0$，$(i=1,\cdots,n)$。故$\{\varphi_\mu^{(i)}:i=1,\cdots,n\}$线性无关。所以$v_\mu\geqslant v_\lambda$，由$\lambda$和$\mu$地位之对称性得$v_\mu=v_\lambda$。

§4 q过程的构造

在这一节中，我们将对给定的q函数对 $q(x)$——$q(x,A)$，（不必保守），来构造其q过程。沿用§3的符号。

引理4.1 设 w_μ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度，$(\mu>0)$，令

$$\begin{cases}\psi_\mu^{(0)}\equiv 0\\ \int_A \psi_\mu^{(n+1)}(dx)(\mu+q(x))=w_\mu(A)+\int_E \psi_\mu^{(n)}(dx)q(x,A),\end{cases}\tag{4.1}$$

则当 $n\to\infty$ 时，$\psi_\mu^{(n)}(A)$ 单调上升到

$$\int_E w_\mu(dx)\,\bar{\Psi}(\mu,x,A).$$

证：首先证明由（4.1）定义的 $\psi_\mu^{(n)}$ 是 $\mathscr{E}$ 上的唯一确定的有限测度而且

$$\int_E \psi_\mu^{(n)}(dx)q(x)<\infty,\quad (n\geqslant 0).$$

为此，对 n 作归纳法．显然 $n=0$ 时上述论断成立．设当 $n=k$ 时上述论断成立，则由(4.1) 有

$$\psi_\mu^{(k+1)}(A)=\int_A \vartheta_\mu^{(k)}(dx)\frac{1}{\mu+q(x)},$$

其中 $$\vartheta_\mu^{(k)}(A)=w_\mu(A)+\int_E \psi_\mu^{(k)}(dx)q(x,A),$$

所以 $\psi_\mu^{(k+1)}$ 也是 $\mathscr{E}$ 上唯一确定的有限测度，且

$$\int_E \psi_\mu^{(k+1)}(dx)q(x)=\int_E \vartheta_\mu^{(k)}(dx)\frac{q(x)}{\mu+q(x)}$$

$$\leqslant \vartheta_\mu^{(k)}(E)\leqslant w_\mu(E)+\int_E \psi_\mu^{(k)}(dx)q(x)<\infty.$$

其次我们证明 $n\to\infty$ 时 $\psi_\mu^{(n)}(A)$ 单调上升到

$$\int_E w_\mu(dx)\bar{\Psi}(\mu,x,A).$$

事实上，令

$$T^{(0)}(\lambda,x,A)\equiv 0,\quad T^{(n)}(\lambda,x,A)=\sum_{k=0}^{n-1}\Psi^{(k)}(\lambda,x,A),\quad (n\geqslant 1),$$

$$\varphi_{\mu}^{(n)}(A)=\int_{E} w_{\mu}(dx)T^{(n)}(\mu,x,A),\quad (n\geqslant 0),$$

而由命题2.1有

$$\Psi^{(n)}(\mu,x,A)=\int_{E}\pi^{(n)}(\mu,x,dy)\Psi^{(0)}(\mu,y,A),$$

所以

$$\int_{A}\varphi_{\mu}^{(n+1)}(dx)(\mu+q(x))$$

$$=\int_{E} w_{\mu}(dx)\int_{A}\sum_{k=0}^{n}\Psi^{(k)}(\mu,x,dy)(\mu+q(y))$$

$$=\int_{E} w_{\mu}(dx)\int_{E}\sum_{k=0}^{n}\pi^{(k)}(\mu,x,dy)\int_{A}\Psi^{(0)}(\mu,y,dz)(\mu+q(z))$$

$$=\int_{E} w_{\mu}(dx)\ \sum_{k=0}^{n}\pi^{(k)}(\mu,x,A)$$

$$=w_{\mu}(A)+\int_{E} w_{\mu}(dx)\int_{E}\sum_{k=0}^{n-1}\pi^{(k)}(\mu,x,dy)\pi(\mu,y,A)$$

$$=w_{\mu}(A)+\int_{E} w_{\mu}(dx)\int_{E}\sum_{k=0}^{n-1}\pi^{(k)}(\mu,x,dy)\cdot\int_{E}\Psi^{(0)}(\mu,y,dz)q(z,A)$$

$$=w_{\mu}(A)+\int_{E} w_{\mu}(dx)\int_{E}\sum_{k=0}^{n-1}\Psi^{(k)}(\mu,x,dy)q(y,A)$$

$$=w_{\mu}(A)+\int_{E}\varphi_{\mu}^{(n)}(dx)q(x,A).$$

所以 $\varphi_{\mu}^{(n)}=\psi_{\mu}^{(n)}$ $(n\geqslant 0)$. 而 $n\to\infty$ 时 $\varphi_{\mu}^{(n)}(A)$ 单调上升到 $\int_{E} w_{\mu}(dx)\ \bar{\Psi}(\mu,x,A)$, 故 $\psi_{\mu}^{(n)}(A)$ 亦然。

引理4.2 若 $\sup_{x\in E}\sum_{n=0}^{\infty}\pi^{(n)}(\lambda,x,E)<\infty\ (\lambda>0)$，令

$$\mathscr{L}_1=\left\{\psi_\lambda:\begin{array}{l}\psi_\lambda\text{是}\mathscr{E}\text{上有限测度，}\\ \int_E\psi_\lambda(dx)q(x)<\infty(\lambda>0)\text{且}\\ \int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A)\\ =\psi_\mu(A),\lambda,\mu>0,A\in\mathscr{E}.\end{array}\right\},$$

$$\mathscr{L}_2=\left\{\psi_\lambda:\begin{array}{l}\psi_\lambda(A)=\int_E w(dx)\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\tilde{\psi}_\lambda(A),\\ \lambda>0,A\in\mathscr{E},\\ w\text{是}\varepsilon\text{上有限测度，}\tilde{\psi}_\lambda\in V_\lambda(s)\text{且}\\ \int_E\tilde{\psi}_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A)=\tilde{\psi}_\mu(A),\\ \lambda,\ \mu>0,\ A\in\mathscr{E}\\ \int_E\psi_\lambda(dx)q(x)<\infty,\ (\lambda>0).\end{array}\right\},$$

则$\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2$。

证：(1) $\mathscr{L}_2\subset\mathscr{L}_1$。任取$\psi_\lambda\in\mathscr{L}_2$，$\psi_\lambda$必是$\mathscr{E}$上有限测度且$\int_E\psi_\lambda(dx)q(x)<\infty$。又由$\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ A)$满足预解方程得：

$$\begin{aligned}&\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\ \mu,\ x,\ A)\\ =&\int_E w(dx)\int_E\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ dy)M(\lambda,\ \mu,\ y,\ A)\\ &+\int_E\tilde{\psi}_\lambda(dx)M(\lambda,\ \mu,\ x,\ A)\\ =&\int_E w(dx)\overline{\Psi}(\mu,\ x,\ A)+\tilde{\psi}_\mu(A)=\psi_\mu(A).\end{aligned}$$

故$\psi_\lambda\in\mathscr{L}_1$。

(2) $\mathscr{L}_1\subset\mathscr{L}_2$。

任取$\psi_\lambda \in \mathscr{L}_1$，必有

$$0 \leqslant \psi_\lambda(A) = \int \psi_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A)$$

$$= \psi_\mu(A) + (\mu - \lambda)\int \psi_\mu(dx)\overline{\Psi}(\lambda, x, A),$$

所以

$$\mu\psi_\mu(A) \geqslant \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\int \psi_\mu(dx)(\lambda^2 \overline{\Psi}(\lambda, x, A) - \lambda I_A(x)). \tag{4.2}$$

而由命题1.1有

$$\lim_{\lambda \to \infty}(\lambda^2 \overline{\Psi}(\lambda, x, A) - \lambda I_A(x))$$

$$= q(x, A) - q(x) I_A(x), \tag{4.3}$$

而且由第一编定理7.1有

$$|\lambda^2 \overline{\Psi}(\lambda, x, A) - \lambda I_A(x)|$$

$$= \left| \int_0^\infty e^{-s} s \left(\frac{P\left(\frac{s}{\lambda}, x, A\right) - I_A(x)}{\frac{s}{\lambda}} \right) ds \right|$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-s} s \left| \frac{1 - e^{-q(x)\frac{s}{\lambda}}}{\frac{s}{\lambda}} \right| ds$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-s} s q(x) ds = q(x). \tag{4.4}$$

又
$$\int_E \psi_\mu(dx) q(x) < \infty, \tag{4.5}$$

因此，由（4.3）—（4.5）在（4.2）中对$\lambda \to \infty$取极限并用控制收敛定理即可得：

$$\mu\psi_\mu(A) \geqslant \int_E \psi_\mu(dx)(q(x, A) - q(x) I_A(x)). \tag{4.6}$$

故可令

$$\mu\psi_\mu(A) = w_\mu(A) + \int_E \psi_\mu(dx)(q(x,A) - q(x)I_A(x)),$$
(4.7)

其中w_μ是$\mathscr{E}$上的有限测度，若再令

$$\begin{cases} \psi_\mu^{(0)} \equiv 0 \\ \mu\psi_\mu^{(n+1)}(A) + \int_A \psi_\mu^{(n+1)}(dx)q(x) \\ \quad = w_\mu(A) + \int_E \psi_\mu^{(n)}(dx)q(x,A), \end{cases} \tag{4.8}$$

比较（4.7）、（4.8）并对n作归纳法可证：

$$0 \leqslant \psi_\mu^{(n)}(A) \leqslant \psi_\mu^{(n+1)}(A) \leqslant \psi_\mu(A), \qquad (A \in \mathscr{E}),$$

所以，若令

$$\psi_\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \psi_\mu^{(n)}(A), \qquad (A \in \mathscr{E}),$$

则由引理4.1有

$$\psi_\mu^*(A) = \int_E w_\mu(dx)\overline{\Psi}(\mu, x, A). \tag{4.9}$$

由$\psi_\mu(A) \geqslant \psi_\mu^*(A)$可令

$$\psi_\mu(A) = \tilde{\varphi}_\mu(A) + \int_E w_\mu(dx)\overline{\Psi}(\mu, x, A), \tag{4.10}$$

其中w_μ、$\tilde{\varphi}_\mu$都是$\mathscr{E}$上有限测度。如果能证w_μ不依赖$\mu>0$，$\tilde{\varphi}_\mu$满足

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_\mu \in V_\mu(s) \\ \int_E \tilde{\varphi}_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A) = \tilde{\varphi}_\mu(A) \quad (\lambda,\mu>0, A \in \mathscr{E}), \end{cases}$$

则$\psi_\lambda \in \mathscr{L}_2$，亦即引理4.2得证。

(A) $\tilde{\varphi}_\mu \in V_\mu(s)$。

由于$\tilde{\varphi}_\mu \leqslant \psi_\mu$，所以$\int_E \tilde{\varphi}_\mu(dx)q(x) \leqslant \int_E \psi_\mu(dx)q(x) < \infty$。

再用（4.10）、（4.7）及$\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$满足（$F_1$）可得：

$$\int_E \tilde{\psi}_\mu(dx)(q(x, A)-q(x)I_A(x))$$

$$=\int_E \psi_\mu(dx)(q(x, A)-q(x)I_A(x))$$

$$-\int_E w_\mu(dx)\int_E \Psi(\mu,x,dy)(q(x,A)-q(x)I_A(x))$$

$$=\mu\psi_\mu(A)-w_\mu(A)-\int_E w_\mu(dx)(\mu\Psi(\mu,x,A)-I_A(x))$$

$$=\mu\left[\psi_\mu(A)-\int_E w_\mu(dx)\Psi(\mu,x, A)\right]=\mu\tilde{\psi}_\mu(A).$$

故$\tilde{\psi}_\mu\in V_\mu(s)$。

(B) (4.10) 的表示法唯一。

为证此，注意 (A)，只须证：

$$\int_E w_\mu(dx)\Psi(\mu,x,A)+\tilde{\psi}_\mu(A)\equiv 0,$$

$$\tilde{\psi}_\mu\in V_\mu(s)\Longrightarrow w_\mu\equiv\tilde{\psi}_\mu\equiv 0.$$

事实上，

$$\int_E w_\mu(dx)\int_E \Psi(\mu, x, dy)q(y)$$

$$=\int_E \psi_\mu^*(dx)q(x)\leqslant\int_E \psi_\mu(dx)q(x)<\infty,$$

所以由$\Psi(\lambda,x,A)$满足$(F_\lambda)\tilde{\psi}_\mu\in V_\mu(s)$及$\int_E W_\mu(dx)\Psi(\mu, x, A)+\tilde{\psi}_\mu(A)\equiv 0$得

$$0\equiv\int_I\left[\int_E W_\mu(dx)\Psi(\mu,x,dy)+\tilde{\psi}_\mu(dy)\right]$$

$$[\mu I_A(y)-(q(y,A)-q(y)I_A(y))]$$

$$=\int_E w_\mu(dx)\int_E \Psi(\mu,x,dy)[\mu I_A(y)$$

$$-(q(y, A)-I_A(y)q(y))]$$

$$=W_\mu(A),$$

故$\tilde{\psi}_\mu \equiv 0$。

(C) 最后证明$w_\mu = w$不依赖$\mu>0$，且

$$\tilde{\psi}_\lambda(A) = \int_E \tilde{\psi}_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A),$$

$$(\lambda, \mu>0, x\in E, A\in \mathscr{E}).$$

事实上，由于$\psi_\mu \in \mathscr{L}_1$，所以若注意（4.10）与预解方程得：

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(A) &= \int_E \psi_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A)\\ &= \int_E \tilde{\psi}_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A)\\ &\quad + \int_E w_\mu(dx)\int_E \overline{\Psi}(\mu, x, dy) M(\mu, \lambda, y, A)\\ &= \int_E \tilde{\psi}_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A) + \int_E w_\mu(dx)\overline{\Psi}(\lambda, x, A).\end{aligned} \tag{4.11}$$

又因为$\tilde{\psi}_\mu \in V_\mu(s)$，所以利用命题3.6有

$$\int_E \tilde{\psi}_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A) \in V_\lambda(s).$$

但是

$$\psi_\lambda(A) = \int_E w_\lambda(dx)\overline{\Psi}(\lambda, x, A) + \tilde{\psi}_\lambda(A), \tag{4.12}$$

所以比较（4.11）与（4.12）并注意（4.10）中的表示法唯一可得：

$$w_\lambda(A) = w_\mu(A), \tilde{\psi}_\lambda(A) = \int_E \tilde{\psi}_\mu(dx) M(\mu, \lambda, x, A),$$

$(\lambda, \mu>0, A\in \mathscr{E})$。

至此，引理4.2证毕。

引理4.3 对$U_\lambda(s)$中任一函数$\xi(\lambda, x)$，$\sup_{x\in E}|\xi(\lambda, x)|\leqslant 1$，均有

$$\xi(\lambda, x) \leqslant \bar{\xi}(\lambda, x), \quad (x\in E).$$

证：由于$\xi(\lambda, x)\in U_\lambda(s)$，所以

$$\xi(\lambda, x)-\int_E \frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\xi(\lambda, y)=\int_E \pi(\lambda,x,dy)\xi(\lambda,y)$$

$$=\cdots=\int_E \pi^{(n)}(\lambda,x,dy)\xi(\lambda,y)\leqslant \pi^{(n)}(\lambda,x,E). \tag{4.13}$$

但是，由命题2.1有

$$S^{(n)}(\lambda,x,A)=\sum_{k=0}^{n}\Psi^{(k)}(\lambda, x, A)$$

$$=\Psi^{(0)}(\lambda,x,A)+\int_E \sum_{k=1}^{n}\pi^{(k)}(\lambda,x,dy)\cdot \Psi^{(0)}(\lambda, y, A),$$

所以

$$\int_E S^{(n)}(\lambda, x, dy)(\lambda+q(y))$$

$$=1+\int_E S^{(n-1)}(\lambda, x, dy)q(y, E), \tag{4.14}$$

更有

$$\int_E S^{(n)}(\lambda,x,dy)q(y)\leqslant 1+\int_E S^{(n-1)}(\lambda,x,dy)q(y)$$

$$\leqslant\cdots\leqslant n+\int_E S^{(0)}(\lambda,x,dy)q(y)$$

$$=n+\int_E \Psi^{(0)}(\lambda,x,dy)q(y)$$

$$=n+\frac{q(x)}{\lambda+q(x)}<\infty, \tag{4.15}$$

故在（4.14）两边可以减去$\int_E S^{(n-1)}(\lambda, x,dy)q(y)$，得

$$\lambda S^{(n)}(\lambda,x, E)+\int_E \Psi^{(n)}(\lambda,x,dy)q(y)\leqslant 1.$$

所以再用命题2.1由上式得：

$$\lambda S^{(n)}(\lambda,x,E)\leqslant 1-\int_E \pi^{(n)}(\lambda,x,dy)\cdot$$

$$\int_E \Psi^{(0)}(\lambda,y,dz)q(z)$$

$$\leqslant 1-\int_E \pi^{(n)}(\lambda,x,dy)\cdot$$

$$\int_E \Psi^{(0)}(\lambda,y,z)q(z,\ E)$$

$$=1-\pi^{(n+1)}(\lambda,\ x,\ E). \qquad (4.16)$$

以（4.16）代入（4.13）并注意

$$\lim_{n\to\infty}[1-\lambda S^{(n)}(\lambda,\ x,\ E\ )]=\bar{\xi}(\lambda,\ x)$$

即得 $\xi(\lambda,\ x)\leqslant \bar{\xi}(\lambda,\ x)$。

引理4.4 设$\dim U_\lambda(s)>0$，$\xi(\lambda,\ \cdot)\in U_\lambda(s)$，$\xi(\lambda,\cdot)\neq 0$，$\varphi_\lambda$是$\mathscr{E}$上的有限测度，$(\lambda>0)$，令

$$\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\xi(\lambda,x)\varphi_\lambda(A), \qquad (4.17)$$

则$\Psi(\lambda,x,\ A)$ 满足预解方程式的充要条件是：

$$\varphi_\lambda(A)=m_\lambda\psi_\lambda(A),\ (\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}),$$

其中ψ_λ是$\mathscr{E}$上的有限测度且满足

$$\psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(A)M(\lambda,\mu,x,A),\ (\lambda,\mu>0,A\in\mathscr{E}),$$

$m_\lambda\geqslant 0$且满足

$$m_\lambda=m_\mu\left[1+(\mu-\lambda)m_\lambda\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu,\ x)\right].$$

证：由（4.17）及$\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ A)$ 满足预解方程知：$\Psi(\lambda,x,A)$ 满足预解方程的充要条件是

$$(\varphi_\lambda(A)\xi(\lambda,\ x)-\varphi_\mu(A)\xi(\mu,\ x))$$

$$+(\lambda-\mu)\Big(\int_E\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ dy)\xi(\mu,\ y)\varphi_\mu(A)$$

$$+\int_E\xi(\lambda,\ x)\varphi_\lambda(dy)\xi(\mu,\ y)\varphi_\mu(A)$$

$$+\int_E \xi(\lambda, x)\varphi_\lambda(dy)\Psi(\mu, y, A)\Big)=0.$$

亦即

$$\xi(\lambda, x)\int_E \varphi_\lambda(dy)M(\lambda, \mu, y, A)$$

$$-\int_E M(\mu, \lambda, x, dy)\xi(\mu, y)\varphi_\mu(A)$$

$$+(\lambda-\mu)\int_E \xi(\lambda,x)\varphi_\lambda(dy)\xi(\mu,y)\varphi_\mu(A)=0. \quad (4.18)$$

但是，由命题3.2有

$$\xi(\lambda, x)=\int_E M(\mu, \lambda, x, dy)\xi(\mu, y),$$

所以，(4.18) 等价于

$$\xi(\lambda,x)\int_E \varphi_\lambda(dy)M(\lambda,\mu,y,A)-\xi(\lambda, x)\varphi_\mu(A)$$

$$+(\lambda-\mu)\int_E \xi(\lambda,x)\varphi_\lambda(dy)\xi(\mu,y)\varphi_\mu(A)=0. \quad (4.19)$$

由于$\xi(\lambda, \cdot)$ 是$U_\lambda(s)$ 中非恒0函数，所以 (4.19) 等价于

$$\int_E \varphi_\lambda(dy)M(\lambda, \mu, y, A)-\varphi_\mu(A)$$

$$+(\lambda-\mu)\int_E \varphi_\lambda(dy)\xi(\mu, y)\varphi_\mu(A)=0. \quad (4.20)$$

而 (4.20) 又等价于

$$\varphi_\lambda(A)=m_\lambda\psi_\lambda(A),$$

其中ψ_λ是$\mathscr{E}$上的有限测度且满足

$$\psi_\mu(A)=\int_E \psi_\lambda(dy)M(\lambda, \mu, y, A),$$

$m_\lambda\geqslant 0$且满足

$$m_\lambda=m_\mu\Big[1+(\mu-\lambda)m_\lambda\int_E \psi_\lambda(dy)\xi(\mu, y)\Big]. \quad (4.21)$$

引理4.4得证。

引理4.5 若$q(x)$—$q(x,A)$是一对保守的q函数，$\dim U_\lambda(s)>0$，φ_λ是$\mathscr{E}$上的有限测度（$\lambda>0$），令

$$\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\overline{\xi}(\lambda,x)\varphi_\lambda(A), \tag{4.22}$$

则$\Psi(\lambda, x, A)$满足预解方程式的充要条件是：

$$\varphi_\lambda(A)=(c+\lambda\psi_\lambda(E))^{-1}\psi_\lambda(A),\ (\lambda>0,\ A\in\mathscr{E}), \tag{4.23}$$

其中ψ_λ是$\mathscr{E}$上的有限测度且满足

$$\psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dy)M(\lambda,\mu,y,A),\ (\lambda,\mu>0,A\in\mathscr{E}), \tag{4.24}$$

c是实数且$(c+\lambda\psi_\lambda(E))>0$，$(\lambda>0)$。

证：首先注意：由$q(x)$—$q(x, A)$的保守性，及$\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$满足$(B_\lambda)$可知：

$$\begin{aligned}&(\lambda+q(x))\overline{\xi}(\lambda, x)-\int_E q(x, dy)\overline{\xi}(\lambda,y)\\&=(\lambda+q(x))(1-\lambda\overline{\Psi}(\lambda, x, E))-q(x, E)\\&\quad+\int_E q(x, dy)\lambda\overline{\Psi}(\lambda, y, E)\\&=0,\end{aligned}$$

所以$\overline{\xi}(\lambda, \cdot)\in U_\lambda(s)$。而由$\dim U_\lambda(s)>0$及引理4.3知$\overline{\xi}(\lambda,\cdot)\neq 0$，$(\lambda>0)$。所以$\overline{\xi}(\lambda, \cdot)$完全满足引理4.4中的$\xi(\lambda, \cdot)$的条件。因此，用引理4.4，为证引理4.5，只须证明

$$\begin{cases}m_\lambda=m_\mu[1+(\mu-\lambda)m_\lambda\int_E\psi_\lambda(dy)\overline{\xi}(\mu,y)],\ (\lambda,\mu>0)\\ m_\lambda\geqslant 0\end{cases} \tag{4.25}$$

的解为：$m_\lambda\equiv 0$，$(\lambda>0)$，或者为

$$m_\lambda=(c+\lambda\psi_\lambda(E))^{-1},$$

c是实数，$(c+\lambda\psi_\lambda(E))>0$，$(\lambda>0)$。事实上，令

$$\sigma(\lambda,\ \mu)=\int_E \psi_\lambda(dy)\,\bar{\xi}(\mu,\ y),$$

则（4.25）化为

$$m_\lambda - m_\mu = (\mu-\lambda) m_\lambda m_\mu \sigma(\lambda,\ \mu).$$

所以m_λ或则对任何$\lambda>0$均不为0或则对每一个$\lambda>0$均为0。

(a) 若$m_\lambda \equiv 0$，($\lambda>0$)，则论断得证。

(b) 若$m_\lambda \neq 0$，（对一切$\lambda>0$），则（4.25）化为

$$m_\mu^{-1} - \mu\sigma(\lambda,\ \mu) = m_\lambda^{-1} - \lambda\sigma(\lambda,\ \mu). \tag{4.26}$$

但是

$$\sigma(\lambda,\ \mu)=\psi_\lambda(E)-\mu\int_E \psi_\lambda(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,E), \tag{4.27}$$

又因为

$$\psi_\mu(A)=\int_E \psi_\lambda(dy)M(\lambda,\ \mu,\ y,\ A)$$

$$=\psi_\lambda(A)+(\lambda-\mu)\int_E \psi_\lambda(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,A), \tag{4.28}$$

所以，由（4.28）及$\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ A)$满足预解方程式得：

$$\int_E \psi_\mu(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,A)=\int_E \psi_\lambda(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,A). \tag{4.29}$$

由（4.27）—（4.29）得：

$$\sigma(\lambda,\mu)=\psi_\lambda(E)-\mu\int_E \psi_\lambda(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,E)$$

$$=\psi_\mu(E)-\lambda\int_E \psi_\mu(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,E). \tag{4.30}$$

以（4.30）代入（4.26）得：

$$m_\mu^{-1}-\mu\psi_\mu(E)+\lambda\mu\int_E\psi_\mu(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,E)$$

$$=m_\lambda^{-1}-\lambda\psi_\lambda(E)+\lambda\mu\int_E\psi_\lambda(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,E). \tag{4.31}$$

由（4.29）和（4.31）看出：

$$m_\lambda^{-1}-\lambda\psi_\lambda(E)=c \text{ 与}\lambda>0\text{无关。}$$

此即

$$m_\lambda=(c+\lambda\psi_\lambda(E))^{-1}.$$

由$m_\lambda>0$有$(c+\lambda\psi_\lambda(E))>0$，$(\lambda>0)$。

定理4.1 任给一对 q 函数 $q(x)$—$q(x,A)$，（不必保守），设 $\dim U_{\lambda_0}(s)>0$，$\xi(\lambda_0,\cdot)\in U_{\lambda_0}(s)$，$\xi(\lambda_0,\cdot)\doteq 0$，

$\xi(\mu,x)=\int_E M(\lambda_0,\mu,x,dy)\xi(\lambda_0,y)$，$(\mu>0)$，令

$$\Psi=\left\{\Psi(\lambda,x,A):\begin{array}{l}\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)\\ \qquad+\xi(\lambda,x)\varphi_\lambda(A),\\ \varphi_\lambda(A)=m_\lambda\psi_\lambda(A),\psi_\lambda\text{是}\mathscr{E}\text{上有}\\ \quad\text{限测度,}\\ \psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,\\ \qquad x,A),\ \begin{pmatrix}\lambda,\ \mu>0\\ A\in\mathscr{E}\end{pmatrix},\\ m_\lambda\geqslant 0,\text{且}m_\lambda=m_\mu[1+(\mu-\lambda)\cdot\\ \qquad m_\lambda\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu,x)],\\ \lambda m_\lambda\xi(\lambda,x)\psi_\lambda(E)\leqslant 1-\lambda\overline{\Psi}(\lambda,\\ \qquad x,E),\ \begin{pmatrix}\lambda,\mu>0\\ x\in E\end{pmatrix}.\end{array}\right\}.$$

$$\Psi_1=\left\{\Psi(\lambda,x,A):\ \begin{array}{l}\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\xi(\lambda,\\ \quad x)\psi_\lambda(A),\\ \varphi_\lambda(A)=m_\lambda\psi_\lambda(A),\ \psi_\lambda\text{是}\mathscr{E}\text{上}\\ \quad\text{有限测度,}\\ \psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,\\ \qquad A),\ \binom{\lambda,\mu>0,}{A\in\mathscr{E}},\\ m_\lambda\geqslant 0\text{且满足：或则}m_\lambda\equiv 0,\\ \quad(\lambda>0),\\ \text{或则}m_\lambda^{-1}=f(\lambda,\mu)+\lambda\cdot\\ \quad\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu,\ x),\\ (\lambda,\mu>0),\ f(\lambda,\ \mu)\text{ 对称实值}\\ \quad\text{函数,}\\ \lambda m_\lambda\xi(\lambda,x)\psi_\lambda(E)\leqslant 1-\lambda\overline{\Psi}(\lambda,\\ \quad x,\ E).\end{array}\right\},$$

则

(1) $\Psi=\Psi_1$. 且Ψ是一族q过程;

(2) 若$\dim U_\lambda(s)=1$，则Ψ是全部q过程.

证：(2) 设$\dim U_\lambda(s)=1$. 任取一个q过程$\Psi(\lambda,\ x,\ A)$. 由$\Psi(\lambda,\ x,\ A)$ 和$\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ A)$ 均满足 (B_λ) 可得：

$$\begin{aligned}&(\lambda+q(x))(\Psi(\lambda,\ x,\ A)-\overline{\Psi}(\lambda,\ x,\ A))\\ &=\int_E q(x,dy)(\Psi(\lambda,y,A)-\overline{\Psi}(\lambda,\ y,\ A)).\end{aligned}\tag{4.32}$$

故$(\Psi(\lambda,\cdot,A)-\overline{\Psi}(\lambda,\cdot,\ A))\in U_\lambda(s)$. 由 $\dim U_\lambda(s)=1$, $\xi(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$, $\xi(\lambda,\ \cdot)\not\equiv 0$, (一切$\lambda>0$)得知

$$\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\xi(\lambda,x)\varphi_\lambda(A),\tag{4.33}$$

其中 φ_λ 是$\mathscr{E}$上的有限测度. 由 $\Psi(\lambda,\ x,\ A)$ 满足预解方程式及

$0\leqslant\lambda\overline{\Psi}(\lambda, x, A)\leqslant 1$再应用引理4.4得知$\Psi(\lambda, x, A)\in\Psi'$。

任取$\Psi(\lambda, x, A)\in\boldsymbol{\Psi}$，用引理4.4，$\Psi(\lambda, x, A)$必满足预解方程式，而显然还满足定理2.1中的（i）、（ii）。再注意$\xi(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$，及$\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$满足（$B_\lambda$），可得$\Psi(\lambda, x, A)$亦满足（$B_\lambda$），因此，再用定理2.3可知$\Psi(\lambda, x, A)$是一个$q$过程。

（1）从上述证明发现，只要$\dim \boldsymbol{U}_\lambda(s)>0$，$\Psi$总是一族$q$过程。最后往证$\Psi'=\Psi_1$。

为此，解

$$\begin{cases}m_\lambda=m_\mu[1+(\mu-\lambda)m_\lambda\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu, x)],\\ \psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda, \mu, x, A).\end{cases}\tag{4.34}$$

显然满足（4.34）的m_λ或则对任何$\lambda>0$皆为0或则对每一个$\lambda>0$均不为0。当$m_\lambda\equiv 0$时，即$\Psi(\lambda, x, A)=\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$既属于$\Psi'$又属于$\boldsymbol{\Psi}_1$。所以下面只研究$m_\lambda>0$（一切$\lambda>0$）的情形。这时，（4.34）化为

$$\begin{cases}m_\mu^{-1}-\mu\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu,x)=m_\lambda^{-1}-\lambda\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu,x),\\ \psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda, \mu, x, A).\end{cases}\tag{4.35}$$

而

$$\int_E M(\lambda,\mu,x,dy)\xi(\lambda, y)=\xi(\mu,x),$$

所以（4.35）等价于

$$\begin{cases}m_\mu^{-1}-\mu\int_E\psi_\mu(dx)\xi(\lambda,x)=m_\lambda^{-1}-\lambda\int_E\psi_\lambda(dx)\xi(\mu,x),\\ \psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A).\end{cases}\tag{4.36}$$

显然,(4.36)等价于

$$\begin{cases} m_\lambda^{-1}-\lambda\int_E \psi_\lambda(dx)\xi(\mu,x)=f(\lambda,\mu), f(\lambda,\mu)=f(\mu,\lambda), \\ \psi_\mu(A)=\int_E \psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A). \end{cases}$$

总上所述，我们证明了$\Psi=\Psi_1$。

定理4.2 若$q(x)$—$q(x,A)$是一对保守的q 函数，设$\dim U_\lambda(s)>0$。令

$$\Psi_2=\left\{\Psi(\lambda,x,A):\begin{array}{l}\Psi(\lambda,x,A)=\bar{\Psi}(\lambda,x,A)+\bar{\xi}(\lambda,x)\varphi_\lambda(A),\\ \varphi_\lambda(A)=\psi_\lambda(A)(c+\lambda\psi_\lambda(E))^{-1}, c\geqslant 0,\\ c、\psi_\lambda\text{不同时为}0,\ \psi_\lambda\text{是}\mathscr{E}\text{上的有限测度且满足}\\ \psi_\mu(A)=\int_E \psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A),\ \begin{pmatrix}\lambda,\mu>0\\ A\in\mathscr{E}\end{pmatrix}\end{array}\right\},$$

则

(1) Ψ_2是一族q过程；

(2) 若$\dim U_\lambda(s)=1$，则Ψ_2是全部q过程；

(3) Ψ_2中的q过程不断的充要条件是$c=0$。

证：(1)任取$\Psi(\lambda,x,A)\in\Psi_2$。显然$\Psi(\lambda,x,A)$满足定理2.1的(i)(ii)。用引理4.5知它还满足预解方程式。由$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足(B_λ)及$q(x)$—$q(x,A)$的保守性(从而$\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$) 可知 $\Psi(\lambda,x,A)$满足(B_λ)。所以,由定理2.3知$\Psi(\lambda,x,A)$是q过程。

(2) 设$\dim U_\lambda(s)=1$。任取一个q过程$\Psi(\lambda,x,A)$。由引理4.3知$\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\neq 0$，再由$\Psi(\lambda,x,A)$及$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$满足$(B_\lambda)$和$\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$ 可知：

$$\Psi(\lambda,x,A)=\bar{\Psi}(\lambda,x,A)+\bar{\xi}(\lambda,x)\varphi_\lambda(A),$$
$$(\lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}),$$

其中φ_λ是$\mathscr{E}$上的有限测度。由$\Psi(\lambda,x,A)$ 满足预解方程式并用引

理4.5得：

$$\varphi_\lambda(A)=(c+\lambda\psi_\lambda(E))^{-1}\psi_\lambda(A),\quad(\lambda>0,A\in\mathscr{E}),$$

其中ψ_λ是$\mathscr{E}$上的有限测度且满足

$$\psi_\mu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\mu,x,A),\quad(\lambda,\mu>0,A\in\mathscr{E}),$$

c是实数且$(c+\lambda\psi_\lambda(E))>0$. 再由$0\leqslant\lambda\Psi(\lambda,x,A)\leqslant1$得知$c\geqslant0$. 总之$\Psi(\lambda,x,A)\in\Psi_2$.

(3) 显然. 定理证毕.

系1　若$q(x)-q(x,A)$保守，$\dim U_\lambda(s)>0$. 令

$$\Psi_2'=\left\{\Psi(\lambda,x,A):\begin{array}{l}\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)\\ \quad+\dfrac{\overline{\xi}(\lambda,x)\int\varphi(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,A)}{c+\lambda\int_E\varphi(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,E)},\\ \varphi\text{是}\mathscr{E}\text{上非0有限测度，且}\\ \int_E\varphi(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,E)<\infty,(\lambda>0),c\geqslant0\end{array}\right\},$$

则$\Psi_2'\subset\Psi_2$，从而Ψ_2'给出一族q过程，且Ψ_2'中的q过程$\Psi(\lambda,x,A)$不断的充要条件是$c=0$.

证：为证$\Psi_2'\subset\Psi_2$，只须证明

$$\int\varphi(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,A)=\int_E\varphi(dy)\int_E\overline{\Psi}(\lambda,y,dz)M(\lambda,\mu,z,A),$$

$(\lambda,\mu>0,\ A\in\mathscr{E})$.

事实上，由$M(\lambda,\mu,x,A)$的定义及$\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$ 满足预解方程式即得：

$$\int_E\varphi(dy)\int_E\overline{\Psi}(\lambda,y,dz)M(\lambda,\mu,z,A)$$

$$=\int_E\varphi(dy)\overline{\Psi}(\lambda,y,A)+(\lambda-\mu)\int_E\varphi(dy)\cdot$$

$$\int_E \overline{\Psi}(\lambda,y,dz)\overline{\Psi}(\mu,z,A)$$

$$=\int_E \varphi(dy)\overline{\Psi}(\mu,y,A).$$

注　Ψ_2'一般称为广义Doob构造。

定理4.3　任给一对q函数$q(x)$—$q(x,A)$，若$\sup\limits_{x\in E}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\pi^{(n)}(\lambda,x,E)<\infty$，$\xi(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$，$(\lambda>0)$，令

$$\Psi_3=\left\{\Psi(\lambda,x,A):\begin{array}{l}\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)\\ \quad+\xi(\lambda,x)m_\lambda\psi_\lambda(A),\\ \Psi(\lambda,x,A)\in\Psi,\psi_\lambda\in\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2.\end{array}\right\},$$

其中$\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$如引理4.2所定义。

则Ψ_3中任一$\Psi(\lambda,x,A)$是一个满足

$$\int_E \Psi(\lambda,x,dy)[\lambda I_A(y)-(q(y,A)-q(y)I_A(y))]=I_A(x),$$

(F_λ)的q过程。

证：若$\dim U_\lambda(s)=0$，则Ψ_3由一个q过程$\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$所构成，故定理4.3的结论成立。

若$\dim U_\lambda(s)>0$，由$\Psi_3\subset\Psi$，为证定理4.3，只须证任取$\Psi(\lambda,x,A)\in\Psi_3$，$(F_\lambda)$成立。事实上，由$\Psi(\lambda,x,A)$是$q$过程，从而满足预解方程，所以

$$\int_E \Psi(\lambda,x,dy)\Psi(\mu,y,A)=\int_E \Psi(\mu,x,dy)\Psi(\lambda,y,A).$$

因此，

$$\int_E \Psi(\lambda,x,dy)(\mu^2\Psi(\mu,y,A)-\mu I_A(y))$$

$$=\int_E \mu\Psi(\mu,x,dy)(\lambda\Psi(\lambda,y,A)-I_A(y)).\qquad(4.37)$$

由于$\Psi(\lambda,x,A)$是q过程，仿(4.4)有：

$$|\mu^2\Psi(\mu,y,A)-\mu I_A(y)|\leqslant q(y), \tag{4.38}$$

显然

$$|\lambda\Psi(\lambda,y,A)-I_A(y)|\leqslant 2. \tag{4.39}$$

再用定理2.2有

$$\lim_{\mu\to\infty}(\mu^2\Psi(\mu,y,A)-\mu I_A(y))=q(y,A)-q(y)I_A(y), \tag{4.40}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu\Psi(\mu,x,A)=I_A(x). \tag{4.41}$$

由$\psi_\lambda\in\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_2$及命题3.5知

$$\int_E\Psi(\lambda,x,dy)q(y)<\infty \tag{4.42}$$

由 (4.38)—(4.42)，并应用控制收敛定理及第一编引理7.3，在(4.37)中令$\mu\to\infty$即得：

$$\int_E\Psi(\lambda,x,dy)(q(y,A)-q(y)I_A(y))$$
$$=\lambda\Psi(\lambda,y,A)-I_A(y).$$

此即$\Psi(\lambda,x,A)$满足(F_λ)。定理证毕。

§5 唯一性准则

仍沿用§4的符号。本节将给出对任意q函数而言，其q过程唯一的充要条件。

命题5.1 设$q(x)$—$q(x,A)$是任意一对q函数，$\Psi(\lambda,x,A)$是其最小q过程，任取$y_1,y_2\in E$，$y_1\neq y_2$，则必存在$\lambda_0>0$，使

$$\frac{\Psi(\lambda_0,y_1,\{y_1\})}{\Psi(\lambda_0,y_1,E)}\neq\frac{\Psi(\lambda_0,y_2,\{y_1\})}{\Psi(\lambda_0,y_2,E)}. \tag{5.1}$$

证： 由定理2.2有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi(\lambda,x,E)=1,\ (x\in E), \tag{5.2}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,x,\{x\})=\infty,\quad (x\in E),\tag{5.3}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,x,\{y\})=q(x,\{y\}),(x,y\in E,x\neq y).\tag{5.4}$$

所以由(5.2)—(5.4)得：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,y_1,\{y_1\})}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda,y_1,E)}-\frac{\lambda^2\overline{\Psi}(\lambda,y_2,\{y_1\})}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda,y_2,E)}\right)=\infty.$$

故(5.1)成立.

命题5.2 设$q(x)$—$q(x,A)$是任意一对q函数．则

(1) 存在不断的q过程的充要条件是：$q(x)$—$q(x,A)$保守.

(2) 若 $q(x)$—$q(x,A)$ 保守，则q过程唯一的充要条件是：$\dim U_\lambda(s)=0$.

(3) 若$q(x)$—$q(x,A)$保守，那么或则恰有唯一一个不断的q过程，或则有无穷多个不断的q过程，且恰有唯一一个不断的q过程的充要条件是：$\dim U_\lambda(s)=0$.

证：(1) 必要性 设$\Psi(\lambda,x,A)$是不断的q过程，故$\Psi(\lambda,x,E)\equiv\frac{1}{\lambda}$. 因此

$$0=\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda^2\Psi(\lambda,x,E)-\lambda)=q(x,E)-q(x),(x\in E).$$

此即$q(x)$—$q(x,A)$是保守的.

充分性 设$q(x)$—$q(x,A)$是保守的，则$\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$. 若$\dim U_\lambda(s)=0$，则$\bar{\xi}(\lambda,x)\equiv 0$，亦即最小$q$过程$\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$是不断的．若$\dim U_\lambda(s)>0$，则用定理4.2中系1知

$$\Psi(\lambda,x,A)=\overline{\Psi}(\lambda,x,A)+\bar{\xi}(\lambda,x)\frac{\overline{\Psi}(\lambda,x_0,A)}{\lambda\overline{\Psi}(\lambda,x_0,E)}$$

是不断的q过程.

(2) 若$q(x)$—$q(x,A)$保守，则$\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$. 再用引理4.3得：

$$\dim U_\lambda(s)=0\Longleftrightarrow\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\equiv 0.$$

而显然“$\bar{\xi}(\lambda,x)=0\ (\lambda>0,x\in E)\Longrightarrow q$过程唯一.” 反之若$q$过程唯一，即恰有$\bar{\Psi}(\lambda,x,E)$这个$q$过程. 由(1),不断的$q$过程必存在，故$\bar{\Psi}(\lambda,x,A)$是不断的，从而$\bar{\xi}(\lambda,x)\equiv 0$. (2) 得证.

(3) 设$q(x)-q(x,A)$保守. (a)若$\dim U_\lambda(s)=0$,则由 (1)和(2) 得知恰有唯一一个不断的q过程. (b) 若$\dim U_\lambda(s)>0$，令

$$\Psi_y(\lambda,x,A)=\bar{\Psi}(\lambda,x,A)+\bar{\xi}(\lambda,x)\frac{\bar{\Psi}(\lambda,y,A)}{\lambda\bar{\Psi}(\lambda,y,E)},\tag{5.5}$$

往证：对任何固定的$y\in E$，$\Psi_y(\lambda,x,A)$ 都是不断的q过程，而且当$y_1\neq y_2$，y_1，$y_2\in E$时$\Psi_{y_1}(\lambda,x,A)$与 $\Psi_{y_2}(\lambda,x,A)$ 是两个不同的q过程.

事实上，由定理4.2中的系1知$\Psi_y(\lambda,x,A)$是不断的q过程,又若$y_1\neq y_2,y_1,y_2\in E$，则由命题5.1知：存在$\lambda_0>0$，使

$$\frac{\bar{\Psi}(\lambda_0,y_1,\{y_1\})}{\lambda_0\bar{\Psi}(\lambda_0,y_1,E)}\neq\frac{\bar{\Psi}(\lambda_0,y_2,\{y_1\})}{\lambda_0\bar{\Psi}(\lambda_0,y_2,E)}.\tag{5.6}$$

由 $\bar{\xi}(\lambda_0,\cdot)\in U_{\lambda_0}(s)$，$\dim U_{\lambda_0}(s)>0$，再应用引理4.3可知 $\bar{\xi}(\lambda_0,\cdot)\neq 0$，所以存在$x_0\in E$，使$\bar{\xi}(\lambda_0,x_0)\neq 0$. 因此,由(5.5)和(5.6)知

$$\begin{aligned}\Psi_{y_1}(\lambda_0,x_0,\{y_1\})&=\bar{\Psi}(\lambda_0,x_0,\{y_1\})\\&\quad+\bar{\xi}(\lambda_0,x_0)\frac{\bar{\Psi}(\lambda_0,y_1,\{y_1\})}{\lambda_0\bar{\Psi}(\lambda_0,y_1,E)}\\&\neq\bar{\Psi}(\lambda_0,x_0,\{y_1\})+\bar{\xi}(\lambda_0,x_0)\frac{\bar{\Psi}(\lambda_0,y_2,\{y_1\})}{\lambda_0\bar{\Psi}(\lambda_0,y_2,E)}\\&=\Psi_{y_2}(\lambda_0,x_0,\{y_1\}).\end{aligned}$$

若还能证E是无限集，则(3) 证毕. 谬设E是有限集，则由$\bar{\xi}(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$ 有

$$\sup_{x\in E}|\bar{\xi}(\lambda,x)|=\sup_{x\in E}\left|\int_E\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\bar{\xi}(\lambda,y)\right|$$

$$\leqslant \sup_{y\in E}|\bar{\xi}(\lambda,y)|\cdot\sup_{x\in E}\frac{q(x)}{\lambda+q(x)},(\lambda>0).$$

又由E为有限集知：

$$0\leqslant\sup_{x\in E}\frac{q(x)}{\lambda+q(x)}<1,\quad(\lambda>0),$$

所以

$$\sup_{x\in E}|\bar{\xi}(\lambda,x)|=0,$$

这与$\dim U_\lambda(s)>0$矛盾．命题5.2证毕．

设$q(x)-q(x,A)$是可测空间$(E,\mathscr{E})$上任意一对q函数，令Δ是E外一点，$E_\Delta=E\cup\{\Delta\}$，$\mathscr{E}_\Delta$是E_Δ上的由$\mathscr{E}$产生的σ代数．作

$$\begin{cases}q_\Delta(x)=I_E(x)q(x),\quad(x\in E_\Delta),\\ q_\Delta(x,A)=I_E(x)[q(x,A-\{\Delta\})+I_A(\Delta)(q(x)\\ \quad -q(x,E)],x\in E_\Delta,A\in\mathscr{E}_\Delta,\end{cases}$$

易证$q_\Delta(x)-q_\Delta(x,A)$是可测空间$(E_\Delta,\mathscr{E}_\Delta)$上的一对保守的$q$函数，而且$q_\Delta(x)=q(x),(x\in E),q_\Delta(x,A)=q(x,A),(x\in E,A\in\mathscr{E})$．

命题5.3 设$P_\Delta(t,x,A)$是一个不断的q_Δ过程，令$P(t,x,A)$是$P_\Delta(t,x,A)$在$(E,\mathscr{E})$上的局限，即是$P(t,x,A)=P_\Delta(t,x,A)$，$(t\in[0,\infty),x\in E,A\in\mathscr{E})$，则

$$P_\Delta(t,x,A)=\begin{cases}I_A(\Delta),\quad 当x=\Delta,t\in[0,\infty),A\in\mathscr{E}_\Delta,\\ P(t,x,A-\{\Delta\})+I_A(\Delta)(1-P(t,x,E)),\\ 当x\in E,t\in[0,\infty),A\in\mathscr{E}_\Delta,\end{cases}$$

而且$P(t,x,A)$是一个q过程，从而对不同的不断的q_Δ过程而言，它们在$(E,\mathscr{E})$上的局限也是不同的q过程．

证：因为 $P_\Delta(t,\Delta,\{\Delta\})\geqslant e^{-q_\Delta(\Delta)t}=1,(t\in[0,\infty))$，所以$P_\Delta(t,\Delta,A)=I_A(\Delta)$．而当$x\in E$时，由$P_\Delta(t,x,A)$是不断的$q_\Delta$过程知

$$P_\Delta(t,x,\{\Delta\})=1-P_\Delta(t,x,E)=1-P(t,x,E),$$
$$(t\in[0,\infty),\quad x\in E).$$

所以当$x\in E, t\in[0,\infty), A\in\mathscr{E}_\Delta$时有：

$$P_\Delta(t,x,A)=P(t,x,A-\{\Delta\})+I_A(\Delta)(1-P(t,x,E)).$$

最后证明$P(t,x,A)$是一个q过程。显然，

(1) 固定$t\in[0,\infty), x\in E, P(t,x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$上有限测度且$0\leqslant P(t,x,E)\leqslant 1$。

(2) 固定$t\in[0,\infty), A\in\mathscr{E}$, $P(t,\cdot,A)\in\mathscr{E}$。

此外，当$x\in E, A\in\mathscr{E}$时还有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P(t,x,A)-P(0,x,A)}{t}=(q_\Delta(x,A)-I_A(x)q_\Delta(x))$$

$$-(q(x,A)-I_A(x)q(x)).$$

所以为证$P(t,x,A)$是q过程，只须证$P(t,x,A)$满足$(K-C)$ 方程式即可。事实上，对一切$s,t\in[0,\infty), x\in E, A\in\mathscr{E}$，有：

$$\begin{aligned}P(s+t,x,A)&=P_\Delta(s+t,x,A)\\&=\int_E P_\Delta(s,x,dy)P_\Delta(t,y,A)+P_\Delta(s,x,\{\Delta\})P_\Delta(t,\Delta,A)\\&=\int_E P(s,x,dy)P(t,y,A).\end{aligned}$$

定理5.1 任给一对q函数$q(x)$—$q(x,A)$，其q过程唯一的充要条件是：$\dim U_\lambda(s)=0$(对一个$\lambda>0$或一切$\lambda>0$)。

证：充分性 设 $\dim U_\lambda(s)=0$。令$\Psi(\lambda,x,A)$是任一q过程，则由$\Psi(\lambda,x,A)$及$\overline{\Psi}(\lambda,x,A)$都满足$(B_\lambda)$知

$$(\lambda+q(x))(\Psi(\lambda,x,A)-\overline{\Psi}(\lambda,x,A))$$

$$=\int_E q(x,dy)(\Psi(\lambda,y,A)-\overline{\Psi}(\lambda,y,A)),$$

$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}).$$

此即对任何$\lambda>0, A\in\mathscr{E}, (\Psi(\lambda,\cdot,A)-\overline{\Psi}(\lambda,\cdot,A))\in U_\lambda(s)$。由$\dim U_\lambda(s)=0$得

$$\Psi(\lambda,x,A)\equiv\overline{\Psi}(\lambda,x,A).$$

此即q过程唯一。

必要性 设$\dim U_\lambda(s)>0$。任取$\xi(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s),\xi(\lambda,\cdot)\neq 0$，作

$$\xi_\Delta(\lambda,\ x)=\begin{cases}\xi(\lambda,x),\ \text{当}x\in E,\\ 0\ ,\text{当}x=\Delta.\end{cases}$$

则当$x\in E$时：

$$\int_{E_\Delta}\frac{q_\Delta(x,dy)}{\lambda+q_\Delta(x)}\xi_\Delta(\lambda,y)=\int_E\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\xi(\lambda,y)$$

$$+\frac{q_\Delta(x,\{\Delta\})}{\lambda+q_\Delta(x)}\xi_\Delta(\lambda,\ \Delta)=\int_E\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\xi(\lambda,y)$$

$$=\xi(\lambda,x)=\xi_\Delta(\lambda,x).$$

而当$x=\Delta$时，显然有

$$\int_{E_\Delta}\frac{q_\Delta(x,dy)}{\lambda+q_\Delta(x)}\xi_\Delta(\lambda,y)=0=\xi_\Delta(\lambda,\ \Delta).$$

这就证明了对$q_\Delta(x)-q_\Delta(x,A)$而言，它所对应的空间$U_\lambda^\Delta(s)$亦有非恒0函数$\xi_\Delta(\lambda,x)$。所以由命题5.2得知有无穷多个不断的$q_\Delta$过程，再用命题5.3得知必有无穷多个$q$过程。定理证毕。

定理5.2 若q函数对$q(x)-q(x,A)$满足$\sup\limits_{x\in E}q(x)=M<\infty$，则$\dim U_\lambda(s)=0,(\lambda>0)$，从而$q$过程唯一。

证：设$\xi(\lambda,\cdot)\in U_\lambda(s)$，则

$$\int_E\frac{q(x,dy)}{\lambda+q(x)}\xi(\lambda,y)=\xi(\lambda,x),\xi(\lambda,\cdot)\in b\mathscr{E},\xi(\lambda,\cdot)\geqslant 0.$$

所以

$$\sup_{x\in E}|\xi(\lambda,x)|\leqslant\sup_{y\in E}|\xi(\lambda,y)|\cdot\sup_{x\in E}\frac{q(x,E)}{\lambda+q(x)}$$

$$\leqslant\sup_{x\in E}|\xi(\lambda,x)|\cdot\left(\frac{M}{\lambda+M}\right)\leqslant\cdots\cdots$$

$$\leqslant\left(\frac{M}{\lambda+M}\right)^n\sup_{x\in E}|\xi(\lambda,x)|,(n\geqslant 1),$$

因此$\xi(\lambda,\cdot)=0$，此即$\dim U_\lambda(s)=0$，$(\lambda>0)$。

§6 Feller 性

在这一节中，恒设$(E, \mathscr{E}, \rho)$是可测距离空间，即是E是任一集合，ρ是E上的一个距离，$\mathscr{E}$是全体开集所产生的σ代数。R^1是实数空间。$\mathbf{T}=[0, \infty)$。$\mathscr{M}=\{f: f\in b\mathscr{E}\}$。再令

$$C=\{f: f: E\longmapsto R^1,\ f\text{有界连续}\}.$$

定义6.1 设μ_n，μ是$\mathscr{E}$上的有限测度，$(n\geq 1)$，如果对任何$f\in C$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(dx)=\int_E f(x)\mu(dx)$，则称$\{\mu_n\}$弱收敛到$\mu$，记为$\mu_n\xrightarrow{W}\mu$，或$(W)\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\mu$。

定义6.2 设 $P(t, x, A)$ $(t\in\mathbf{T}, x\in E, A\in\mathscr{E})$是标准准转移函数，$\{p_t: t\in\mathbf{T}\}$是第一编(4.1)所定义的半群，$\{\Psi_\lambda: \lambda>0\}$是$\{p_t: t\in\mathbf{T}\}$的位势算子，若$f\in C\Longrightarrow p_tf\in C$，$(t\in\mathbf{T})$，则称$\{p_t: t\in\mathbf{T}\}$（或$P(t, x, A)$）具有Feller性；若$f\in C\Longrightarrow\Psi_\lambda f\in C(\lambda>0)$，则称$\{p_t: t\in\mathbf{T}\}$（或$P(t, x, A)$）具有弱Felles性。

定理6.1 设$q(x)$—$q(x, A)$是任意一对q函数，$\bar{P}(t, x, A)$是最小的q过程。如果对任何$x\in E$，当$x_n\to x$时，$q(x_n)\to q(x)$，$q(x_n, \cdot)\xrightarrow{W}q(x, \cdot)$，而且对$E$中任何一个有界闭球$S$，每一个$\lambda>0$，都存在$x_0\in E$($x_0$可依赖$\lambda$)，使

$$\frac{q(x_0, A)}{\lambda+q(x_0)}\geq\frac{q(x, A)}{\lambda+q(x)},\quad (x\in S,\ A\in\mathscr{E}),$$

则$\bar{P}(t, x, A)$具有弱Feller性。

证：由定理1.1有$\bar{P}(t, x, A)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^{(n)}(t, x, A)$，其中

$p^{(0)}(t, x, A)=I_A(x)e^{-q(x)t}$，

$$P^{(n+1)}(t, x, A)$$
$$=\int_0^t e^{-q(x)(t-s)}\left(\int_E q(x, dy)P^{(n)}(s, y, A)\right)ds, \quad (n\geqslant 0).$$

令$\Psi^{(n)}(\lambda, x, A)$和$\overline{\Psi}(\lambda, x, A)$分别为$P^{(n)}(t, x, A)$和$\overline{P}(t, x, A)$的拉氏变换，$\pi^{(0)}(\lambda, x, A)=I_A(x)$，$\pi(\lambda, x, A)=\dfrac{q(x, A)}{(\lambda+q(x))}$，

$\pi^{(n)}(\lambda, x, A)=\int_E \pi^{(n-1)}(\lambda, x, dy)\pi(\lambda, y, A)$，$(n\geqslant 1)$。由命题2.1有

$$\Psi^{(0)}(\lambda, x, A)=\frac{I_A(x)}{(\lambda+q(x))},$$

$$\Psi^{(n+1)}(\lambda, x, A)=\int_E \pi(\lambda, x, dy)\Psi^{(n)}(\lambda, y, A)$$
$$=\int_E \pi^{(n+1)}(\lambda, x, dy)\Psi^{(0)}(\lambda, y, A),$$
$$(n\geqslant 0).$$

任取$f\in C$，$f\geqslant 0$，再令

$$T_\lambda^{(n)}(x)=\int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy)\frac{f(y)}{\lambda+q(y)},$$
$$(\lambda>0, \ x\in E, \ n\geqslant 0),$$

则

$$\int_E \overline{\Psi}(\lambda, x, dy)f(y)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \Psi^{(n)}(\lambda, x, dy)f(y)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy)\frac{f(y)}{\lambda+q(y)}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}T_\lambda^{(n)}(x).$$

显然$T_\lambda^{(0)}(\cdot)\in C$，若$T_\lambda^{(n-1)}(\cdot)\in C$，则由定理假设及

$$
\begin{aligned}
T_\lambda^{(n)}(x) &= \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy)\frac{f(y)}{\lambda+q(y)} \\
&= \int_E \pi(\lambda, x, dy)\int_E \pi^{(n-1)}(\lambda, y, dz)\frac{f(z)}{\lambda+q(z)} \\
&= \int_E q(x, dy)\frac{T_\lambda^{(n-1)}(y)}{\lambda+q(x)},
\end{aligned}
$$

得知$T_\lambda^{(n)}(\cdot)\in C$。所以对一切$n\geqslant 0$，$\lambda>0$，$T_\lambda^{(n)}(\cdot)\in C$。

往证：$\pi^{(n)}(\lambda, x_0, A)\geqslant \pi^{(n)}(\lambda, x, A)$，$(x\in S, A\in\mathscr{E}, n\geqslant 1)$。对$n$作归纳法。$n=1$上述不等式显然成立，设$\pi^{(n-1)}(\lambda, x_0, A)\geqslant\pi^{(n-1)}(\lambda, x, A)$，$(x\in S, A\in\mathscr{E})$，则

$$
\begin{aligned}
\pi^{(n)}(\lambda, x_0, A) &= \int_E \pi^{(n-1)}(\lambda, x_0, dy)\pi(\lambda, y, A) \\
&\geqslant \int_E \pi^{(n-1)}(\lambda, x, dy)\pi(\lambda, y, A) \\
&= \pi^{(n)}(\lambda, x, A), \quad (x\in S, A\in\mathscr{E}).
\end{aligned}
$$

归纳法完成。因此，对一切$n\geqslant 1$均有

$$
\begin{aligned}
T_\lambda^{(n)}(x_0) &= \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x_0, dy)\frac{f(y)}{\lambda+q(y)} \\
&\geqslant \int_E \pi^{(n)}(\lambda, x, dy)\frac{f(y)}{\lambda+q(y)} \\
&= T_\lambda^{(n)}(x), \quad (x\in S).
\end{aligned}
$$

因此，

$$\int_E \Psi(\lambda, x, dy)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_\lambda^{(n)}(x)$$

在$x\in S$上一致收敛，从而$\int_E \Psi(\lambda, x, dy)f(y)$在$x\in S$上连续，而$S$可以为任意有界闭球，所以$\int_E \Psi(\lambda, x, dy)f(y)$在$x\in E$上连续，显然它是有界的。这就证明了：$f\geqslant 0$，$f\in C\Longrightarrow \Psi_\lambda f\in C$，$(\lambda>$

0)。又因为C是$\mathscr{M}$的闭线性子空间，Ψ_λ是有界线性算子，而且任何一个$f\in C$，均可表为$f=f_1-f_2$，$f_i\in C$，$f_i\geqslant 0$，所以"$f\in C\Longrightarrow\Psi_\lambda f\in C(\lambda>0)$"。证毕。

定理6.2 设 $q(x)-q(x, A)$ 是一对 q 函数，任取$f\in\mathscr{M}$，定义

$$(\tilde{Q}f)(x)=\int_E(q(x, dy)-\delta_x(dy)q(x))f(y),$$

若对每一个 $f\in C$, $\lambda>0$，均有 $(\lambda f-\tilde{Q}f)\overline{\in}C$，则每一个$q$过程$P(t, x, A)$都具有弱 Feller 性。

证：设$P(t, x, A)$是任一q过程，$\Psi(\lambda, x, A)$是其拉氏变换，$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$是其位势算子。由命题1.1，$\Psi(\lambda, x, A)$必满足

$$(\lambda+q(x))\Psi(\lambda, x, A)-\int_E q(x, dy)\Psi(\lambda, y, A)$$

$$=I_A(x), \qquad (B_\lambda)$$

$$(\lambda>0, x\in E, A\in\mathscr{E}).$$

因此

$$((\lambda I-\tilde{Q})\circ\Psi_\lambda)f=f,(f\in\mathscr{M}, \lambda>0). \qquad (B_\lambda)'$$

谬设$P(t, x, A)$不具有弱Feller性，即是存在 $f_0\in C$, $\lambda_0>0$，使$\Psi_{\lambda_0}f_0\overline{\in}C$。而由$(B_\lambda)'$有

$$((\lambda_0 I-\tilde{Q})\circ\Psi_{\lambda_0})f_0=f_0\in C.$$

这与定理的假设矛盾。定理得证。

定理6.3 设$P(t, x, A)$是标准准转移函数，$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$是其在$\mathscr{M}$上所定义的半群，$\{\Psi_\lambda:\lambda>0\}$是其位势算子，则$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$具有Feller性而且在C上强连续的充要条件是

(1) $\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$具有弱Feller性；

(2) $C_\lambda=\{f:f=\Psi_\lambda g, g\in C\}$在$C$中稠，$(\lambda>0)$。

证：为证此定理，若注意第一编定理6.3及其系，则只须证明C是$\mathscr{M}$的闭线性子空间及 Feller 性蕴含了弱Feller性，而此二事

实显然成立，故定理成立。

定理6.4 若$(E, \mathscr{E}, \rho)$是紧的可测距离空间，$P(t, x, A)$是标准准转移函数，$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是其在$\mathscr{M}$上所定义的半群，$\{\Psi_\lambda: \lambda>0\}$是其位势算子。设$\Psi_\lambda(C)\subset C$，$(\lambda>0)$，而且对任何$s, t\in \boldsymbol{T}$，$s\leqslant t$，$f\in C$，$f\geqslant 0$，都有$P_s f\leqslant P_t f$，则$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$具有Feller性且在$C$上强连续。

证：任取$f\in C$，$f\geqslant 0$。由于$(P_t f)(x)$在$t\in \boldsymbol{T}$连续，又因为

$$(P_t f)(x)\geqslant (P_s f)(x),\ (s\leqslant t,\ s,\ t\in \boldsymbol{T},\ x\in E,\ f\geqslant 0,\ f\in C),$$

而且$(E, \mathscr{E}, \rho)$是紧的可测距离空间，所以，由Dini定理（见[23] p.391，那儿对$E=[a, b]$来证明，不过证明只需要E的紧性。）可知$P_t f$在$t\in \boldsymbol{T}$强连续。

任取$f\in C$，必有$f=f_1-f_2$，$f_i\subset C$，$f_i\geqslant 0$。而P_t是线性算子，所以$P_t f=P_t f_1-P_t f_2$在$t\in \boldsymbol{T}$强连续。

而由定理假设还有$\Psi_\lambda(C)\subset C$，$(\lambda>0)$，所以，由第一编定理6.3的系有$P_t(C)\subset C$，$(t\in \boldsymbol{T})$，此即$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$具有Feller性。

定理6.5 设q函数对$q(x)—q(x, A)$满足：$q\in C$，$(W)\lim\limits_{x_n\to x} q(x_n, \cdot)=q(x, \cdot)$，$(x\in E)$，令$\bar{P}(t,x,A)$是最小$q$过程，$\bar{\Psi}(\lambda, x, A)$是其拉氏变换，$\{\bar{P}_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是其在$\mathscr{M}$上所产生之半群，则$\{\bar{P}_t: t\in \boldsymbol{T}\}$在$\mathscr{M}$上强连续且具有Feller性。

先证一个引理。

引理6.1 设$P(t, x, A)$是任一q过程，$\{P_t: t\in \boldsymbol{T}\}$是其在$\mathscr{M}$上所产生之半群，则$\sup\limits_{x\in E} q(x)=M<\infty$的充要条件是

(1) $\lim\limits_{t\to 0^+}\sup\limits_{x\in E}(1-P(t, x, \{x\}))=0$;

(2) $\sup\limits_{x\in E} r(x)=N<\infty$,

其中

$$r(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-P(t,\ x,\ E)}{t},$$

(关于上述极限的存在性见[22]。)

若(1)成立，则$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$在$\mathscr{M}$上强连续。

证：必要性　设$\sup\limits_{x\in E}q(x)=M<\infty$。由第一编定理7.1有

$$1-P(t,\ x,\ \{x\})\leqslant 1-e^{-q(x)t},\quad (t\in\boldsymbol{T},\ x\in E),$$

所以

$$\lim_{t\to 0^+}\sup\sup_{x\in E}(1-P(t,\ x,\ \{x\}))\leqslant\lim_{t\to 0^+}(1-e^{-Mt})=0.$$

又因为$r(x)\leqslant q(x)$，$(x\in E)$，所以$\sup\limits_{x\in E}r(x)<\infty$。

充分性由于

$$q(x,\ E)=\lim_{t\to 0^+}\frac{P(t,\ x,\ E-\{x\})}{t}=q(x)-r(x),$$

而由(1)成立，用第一编引理7.2及$P(t,\ x,\ A)$是q过程可得：

$$q(x,\ E)=q(x,\ E-\{x\})\leqslant KP(\tau,\ x,\ E-\{x\}),$$
$$(x\in E),$$

其中K和τ是不依赖$x\in E$的二个正数。

所以

$$\sup_{x\in E}q(x)\leqslant\sup_{x\in E}r(x)+K<\infty.$$

若(1)成立，则对任何$f\in\mathscr{M}$，必有

$$\|P_tf-f\|\leqslant\sup_{x\in E}|(P(t,\ x,\ \{x\})-1)f(x)|$$
$$+\sup_{x\in E}\left|\int_{E-\{x\}}P(t,\ x,\ dy)\ f(y)\right|$$
$$\leqslant 2\|f\|\sup_{x\in E}(1-P(t,\ x,\ \{x\})),$$

所以

$$\lim_{t\to 0^+}\|P_tf-f\|=0,$$

从而$\{P_t:t\in\boldsymbol{T}\}$在$\mathscr{M}$上强连续。

现在我们用引理6.1来证明定理6.5。

由引理6.1即得$\{\overline{P}_t: t\in\boldsymbol{T}\}$在$\mathscr{M}$上强连续。对任何$f\in C$，令$\pi^{(n)}(\lambda, x, A)$，$T_\lambda^{(n)}(x)$如定理6.1所定义。定理6.1中已证：

$$\int_E \Psi(\lambda, x, dy)f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}T_\lambda^{(n)}(x),$$

且在定理6.5的条件下还有：$T_\lambda^{(n)}(\cdot)\in C$，$(\lambda>0, n\geqslant 0)$。

所以，如果能证$\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_\lambda^{(n)}(x)$在$x\in E$上一致收敛(对任何固定的$\lambda>0$)，则$\Psi_\lambda(C)\subset C$，$(\lambda>0)$。再利用第一编定理6.3的系则可知$\{\overline{P}_t: t\in\boldsymbol{T}\}$具有Feller性。下面补证$\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_\lambda^{(n)}(x)$在$x\in E$上一致收敛。事实上，

$$\begin{aligned}|T_\lambda^{(n)}(x)| &\leqslant \frac{\|f\|}{\lambda}\pi^{(n)}(\lambda, x, E)\\ &=\frac{\|f\|}{\lambda}\int_E \pi^{(n-1)}(\lambda, x, dy)\frac{q(x, E)}{\lambda+q(x)}\\ &\leqslant \frac{\|f\|}{\lambda}\frac{M}{\lambda+M}\pi^{(n-1)}(\lambda, x, E)\\ &\leqslant\cdots\cdots\leqslant\frac{\|f\|}{\lambda}\left(\frac{M}{\lambda+M}\right)^n\pi^{(0)}(\lambda, x, E)\\ &=\frac{\|f\|}{\lambda}\left(\frac{M}{\lambda+M}\right)^n,\end{aligned}$$

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_\lambda^{(n)}(x)$在$x\in E$上一致收敛，$(\lambda>0)$。定理证毕。

定理6.6 设q函数对$q(x)$—$q(x, A)$满足$\sup\limits_{x\in E}q(x)=M<\infty$，(由定理5.2，其$q$过程唯一，就是最小$q$过程$\overline{P}(t, x, A)$)若$\overline{P}(t, x, A)$具有Feller性，则

$$(\lambda I-\tilde{Q})C=C,$$

其中$\tilde{Q}$如定理6.2所定义。

证：令$\{\bar{P}_t: t\in\mathscr{T}\}$及$\{\bar{\Psi}_\lambda:\lambda>0\}$为$\bar{P}(t, x, A)$在$\mathscr{M}$上所产生之半群及其位势算子。由于$\bar{P}(t, x, A)$具有Feller性（更具有弱Feller性），所以，可以把$\{\bar{P}_t: t\in\mathscr{T}\}$局限到$C$上去而成一个$C$上的半群（对应地，也把$\{\bar{\Psi}_\lambda:\lambda>0\}$局限到C上去）。由于$\sup\limits_{x\in E} q(x)=M<\infty$，所以由引理6.1得知$\{\bar{P}_t: t\in\mathscr{T}\}$是$C$上的强连续半群。因此，由第一编定理6.3得知$\bar{\Psi}_\lambda(C)$在$C$中稠$(\lambda>0)$。又因为（见定理6.2）有

$$((\lambda I-\bar{Q})\circ\bar{\Psi}_\lambda)f=f,\quad (f\in\mathscr{M},\ \lambda>0). \qquad (B_\lambda)'$$

更有

$$f\in C\Rightarrow(\lambda I-\bar{Q})\circ\bar{\Psi}_\lambda f=f\in C.$$

故$(\lambda I-\bar{Q})\bar{\Psi}_\lambda(C)\subset C$。而$\bar{Q}$是有界线性算子（因为$\sup\limits_{x\in E} q(x)=M<\infty$），$\bar{\Psi}_\lambda(C)$在$C$中稠，所以$(\lambda I-\bar{Q})C\subset C$。

由$(B_\lambda)'$显然还有

$$(\lambda I-\bar{Q})C\supset(\lambda I-\bar{Q})\bar{\Psi}_\lambda(C)\supset C.$$

总之，$(\lambda I-\bar{Q})C=C$。

第　三　编

非时齐的准转移函数的分析理论

如不特别声明，本编恒设$\boldsymbol{T}=[0,\ \infty)$，$(E,\mathscr{E})$为可测空间，$\mathscr{E}$含$E$的一切单点集，$P(s,\ t,\ x,\ A)$ $(0\leqslant s\leqslant t<\infty,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$是准转移函数，未必时齐。未必时齐的（准）转移函数习惯上称为非时齐的（准）转移函数，其实这样叫法是不科学的，不过，既成习惯，只好从众。

§1　非时齐的准转移函数的连续性

定义1.1　称非时齐的准转移函数$P(s,\ t,\ x,\ A)$是标准的，如果

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0^+\\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b}} P(s,\ t,\ x,\ A)=I_A(x),\tag{1.1}$$

$(x\in E,\ A\in\mathscr{E},\ b>0)$.

定理1.1　对任何标准的非时齐的准转移函数$P(s,\ t,\ x,\ A)$，恒有

(1) $P(s,\ t,\ x,\ \{x\})>0,\ (0\leqslant s\leqslant t<\infty,\ x\in E)$;

(2) $|P(u,\ t,\ x,\ A)-P(v,\ t,\ x,\ A)|$

$\leqslant 1-P(\min(u,\ v),\ \max(u,\ v),\ x,\ \{x\}),$

$(0\leqslant u,\ v\leqslant t<\infty,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$;

(3) 对任何$F\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}$，记$F_x=\{y:(x, y)\in F, y\in E\}$，则$P(s, t, x, F_x)$是$x$的$\mathscr{E}$可测函数，特别地，$P(s, t, x, \{x\})$亦然，$(0\leqslant s\leqslant t<\infty)$；

证：(1) 由$(K-C)$方程式知

$$P(s, t, x, \{x\})$$

$$\geqslant\prod_{k=1}^{n}p\left(s+\frac{(k-1)}{n}(t-s), s+\frac{k}{n}(t-s), x, \{x\}\right),$$

再用(1.1)即得(1)。

(2) 不失普遍性，可令$u\leqslant v\leqslant t$，由$(K-C)$方程式有

$$P(u, t, x, A)-P(v, t, x, A)$$

$$\geqslant(P(u, v, x, \{x\}-1)P(v, t, x, A)$$

$$\geqslant P(u, v, x, \{x\})-1,$$

$$P(u, t, x, A)-P(v, t, x, A)$$

$$\leqslant\int_{E-\{x\}}P(u, v, x, dy)P(v, t, y, A)$$

$$\leqslant P(u, v, x, E-\{x\})\leqslant 1-P(u, v, x, \{x\})$$

综合上述二式即得(2)。

(3) 仿第一编定理5.1立即可得(3)。

定理1.2 对任何标准的非时齐的准转移函数$P(s, t, x, A)$，均有：

(1) $P(s, t, x, A)$对s来说，在$[0, t]$上连续（在0点只是右连续，在t点只是左连续），而且此种连续对$t\geqslant 0$和$A\in\mathscr{E}$是等度的；

(2) $P(s, t, x, A)$对t来说，在$[s, \infty)$上右连续，而且此种连续对$A\in\mathscr{E}$来说是等度的。

特别地，若$P(s, t, x, A)$还满足

$$\lim_{(t-s)\to 0^+}\sup_{x\in E}(1-P(s, t, x, \{x\}))=0, \tag{1.1*}$$

则$P(s, t, x, A)$作为(s, t)的二元函数在$\mathscr{D}^* = \{(u, v): 0 \leqslant u \leqslant v < \infty\}$上连续。

证：(1) 由定理1.1的(2)并注意(1.1)立即得(1)。

(2) 利用$(K-C)$方程式可证：对任何$h>0$，有

$$|P(s, t+h, x, A) - P(s, t, x, A)| \leqslant \int_E P(s, t, x, dy)(1 - P(t, t+h, y, \{y\})),$$

所以，用控制收敛定理即得(2)。

特别地，若(1.1)*成立，则必有

$$\lim_{(t-s)\to 0^+} P(s, t, x, A) = P(u, u, x, A) = I_A(x),$$

$$(\text{对}x \in E\text{一致成立}), \tag{1.1}^{**}$$

又因为$P(s, u, x, E) \leqslant 1$，所以

$$\lim_{u\to v-0} |P(s, v, x, A) - P(s, u, x, A)|$$

$$= \lim_{u\to v-0} \int_E P(s, u, x, dy)[P(u, v, y, A) - I_A(y)]$$

$$= 0.$$

此即$P(s, t, x, A)$作为t的函数在(s, ∞)上左连续。既然$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{D}^*$上作为s，t的一元函数皆连续，而作为s的连续函数来说，对t还是等度的，故$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{D}^*$上是(s, t)的二元连续函数。

系 1 对任何标准的非时齐的准转移函数$P(s, t, x, A)$，固定$x \in E$，$A \in \mathscr{E}$，$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{D}^*$上是(s, t)的二维 *Borel* 可测函数。

系 2 若标准的非时齐的准转移函数$P(s, t, x, A)$满足$\lim\limits_{h\to 0^+} P(s, t-h, x, A)$存在$(0 \leqslant s < t < \infty, x \in E, A \in \mathscr{E})$，则$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{D}^*$上是$(s, t)$的二元连续函数。

证：用$(K-C)$方程式及第一编引理7.3知$P(s, t, x, A)$对t

来说在$(s,\ \infty)$上左连续，再用定理1.2(2)即得系2。

§2 全叠积与微叠积

定义2.1 设$[\alpha,\beta]$为实数空间中任一闭区间，$\alpha=\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{n-1}\leqslant\alpha_n=\beta$，则称$\mathscr{D}(\alpha,\beta)=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\}$是$[\alpha,\beta]$的一个分割，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(\alpha_k-\alpha_{k-1})$称为$\mathscr{D}$的直径，用$l(\mathscr{D})$表之。若还有分割$\mathscr{D}'(\alpha,\beta)=\{\alpha'_0,\alpha'_1,\cdots,\alpha'_{m-1},\alpha'_m\}$，令$\beta_0=\alpha_0=\alpha'_0=\alpha,\beta_k=\min\{\alpha_p,\alpha'_q:\alpha_p>\beta_{k-1},\ \alpha'_q>\beta_{k-1}\}$若$\{\alpha_p,\alpha'_q:\alpha_p>\beta_{k-1},\ \alpha'_q>\beta_{k-1}\}$非空，反之令$\beta_k=\beta_{k-1}$，$(k=1,2,\cdots,m+n+1)$。称新分割$\{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{m+n},\ \beta_{m+n+1}\}$是$\mathscr{D}$与$\mathscr{D}'$之并，记之为$\mathscr{D}\cup\mathscr{D}'$。若集合$\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$含于$\{\alpha'_0,\alpha'_1,\cdots,\alpha'_m\}$之中，则称$\mathscr{D}'$是$\mathscr{D}$的“加细”，或称$\mathscr{D}$是$\mathscr{D}'$的子分割，记之为$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$。显然$\mathscr{D}\cup\mathscr{D}'$是$\mathscr{D}(\mathscr{D}')$的加细。

定义2.2 设$f(s,t)$是定义在$a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$上的非负实值函数，$f(t,t)\equiv0(a\leqslant t\leqslant b)$，对任何$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，及$\mathscr{D}(\alpha,\beta)=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，记$\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\alpha_{k-1},\alpha_k)$。称$\sup\limits_{一切\mathscr{D}(\alpha,\beta)}\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))$为$f$在$[\alpha,\beta]$上的全叠积，用$V_f(\alpha,\beta)$表之，在无混淆的情况下，简记之为$V(\alpha,\beta)$。若$V_f(\alpha,\beta)<\infty$，则称$f$在$[\alpha,\beta]$上是有界叠积。若$\lim\limits_{l(\mathscr{D})\to0}\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))$存在，则称$f$在$[\alpha,\beta]$的微叠积存在，记此极限为$I_f(\alpha,\beta)$。若对任何$\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$都有$\sigma_f(\mathscr{D}(\alpha,\beta))\leqslant\sigma_f(\mathscr{D}'(\alpha,\beta))$，则称$\sigma_f(\cdot)$在$D_\alpha^\beta=\{一切分割\mathscr{D}(\alpha,\beta)\}$上单调非降，仿之可以定义单调非升。

命题2.1 设$f(s,t)$是定义在$a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$上的非负实值函数，$f(t,t)\equiv0$，若$I_f(a,b)$存在且有限，则

(1) $I_f(c,d)$存在且$\leqslant I_f(a,b)$，$(a\leqslant c\leqslant d\leqslant b)$；

(2) $I_f(c,c)=0$，$I_f(c,d)=I_f(c,a)+I_f(a,d)$，$(a\leqslant c\leqslant a\leqslant d$

$\leqslant b)$.

证：由$I_f(s,t)$的定义可验证命题2.1成立。

命题2.2 对任何标准的非时齐准转移函数$p(s,t,x,A)$，令

$$f(s,t)=-\log p(s,t,x,\{x\}), \qquad (2.1)$$

则

(1) $\sigma_f(\cdot)$在D_t^s上单调非降，$(0\leqslant s<t<\infty)$；

(2) $I_f(s,t)$存在且等于$V_f(s,t)$，$(0\leqslant s<t<\infty)$；

(3) $f(s,t)\leqslant I_f(s,t)$，$(0\leqslant s<t<\infty)$。 (2.2)

证：(1) 由定理1.1知$f(s,t)$是非负实值函数且$f(t,t)\equiv 0$，再用$(K-C)$方程式即得(1)。

(2) 显然

$$\lim_{l(\mathscr{D})\to 0}\sup\sigma_f(\mathscr{D}(s,t))\leqslant V_f(s,t).$$

谬设

$$\lim_{l(\mathscr{D})\to 0}\inf\sigma_f(\mathscr{D}(s,t))<V_f(s,t)=\sup_{\text{一切}\mathscr{D}}\sigma_f(\mathscr{D}(s,t)),$$

则必存在一个分割$\mathscr{D}_0$及一串分割$\{\mathscr{D}_n\}$使

$$l(\mathscr{D}_n)\to 0,\ \lim_{n\to\infty}\sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t))<\sigma_f(\mathscr{D}_0(s,t)). \quad (2.3)$$

令$\mathscr{D}_n(s,t)=\{s_0^{(n)},s_1^{(n)},\cdots,s_{k(n)}^{(n)}\}$，$\mathscr{D}_0(s,t)=\{s_0,s_1,\cdots,s_{k(0)}\}$，$i^{(n)}(j)=\min\{i:s_i^{(n)}\geqslant s_j\}$，$j=1,2,\cdots,k(0)-1$，则有

$$\sigma_f((\mathscr{D}_n\cup\mathscr{D}_0)(s,t))=\sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t))$$

$$+\sum_{j=1}^{k(0)-1}[f(s^{(n)}_{i^{(n)}(j)-1},s_j)+f(s_j,s^{(n)}_{i^{(n)}(j)})$$

$$-f(s^{(n)}_{i^{(n)}(j)-1},\ s^{(n)}_{i^{(n)}(j)})],$$

由(1.1)有

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0^+\\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b}} f(s,t)=0,$$

若再注意$\lim\limits_{n\to\infty}l(\mathscr{D}_n)=0$和

$$\max\{(s_{l^{(n)}(j)}^{(n)}-s_j),\ (s_{l^{(n)}(j)}^{(n)}-s_{l^{(n)}(j)-1}^{(n)}),\ (s_j-s_{l^{(n)}(j)-1}^{(n)})\}$$

$\leqslant l(\mathscr{D}_n)$，

则可得

$$\liminf_{n\to\infty}\sigma_f((\mathscr{D}_n\cup\mathscr{D}_0)(s,t))$$

$$\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sigma_f(\mathscr{D}_n(s,t)). \quad (2.4)$$

但是，由(1)可知

$$\sigma_f((\mathscr{D}_n\cup\mathscr{D}_0)(s,t))\geqslant\sigma_f(\mathscr{D}_0(s,t)),(n\geqslant1),(2.5)$$

由 (2.4)、(2.5) 得 $\sigma_f(\mathscr{D}_0(s,\ t))\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\sigma_f(\mathscr{D}_n(s,\ t))$，这与(2.3)矛盾。所以 $\lim\limits_{l(\mathscr{D})\to0}\sigma_f(\mathscr{D}(s,t))=I_f(s,t)$存在且等于$V_f(s,t)$。

(3) 由(1)即得(3)。

命题2.3 设$P(s,t,x,A)$是标准的非时齐的准转移函数，任取$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，$x\in A$，若

$$\lim_{(t-s)\to0+}\sup_{y\in A}[1-P(s,t,y,\{y\})]=0, \quad (2.6)$$

则对任何给定的$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,x,A)>0$，使得$0\leqslant t-s<\tau_0$时，对$[s,t]$的任何分割$\mathscr{D}(s,t)=\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}$，有

$$P(s,t,x,A)\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,A). \quad (2.7)$$

证：由(2.6)得知：存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon)>0$使

$$\sup_{\substack{0\leqslant r-q<\tau_0\\ y\in A}}[1-P(q,r,y,\{y\})]<\varepsilon. \quad (2.8)$$

令$G_0(y,B)=I_B(y)$，$G_1(y,\ B)=P(r_0,r_1,y,B)$，$G_{m+1}(y,\ B)=\int_{E-A}G_m(y,dz)P(r_m,r_{m+1},z,B)$，$(y\in E,B\in\mathscr{E},1\leqslant m<n)$。($G_m(y,B)$的概率意义是：系统在时刻$r_0=s$处于状态$y$，在时刻$r_1$，$\cdots$，$r_{m-1}$不进入$A$而在时刻$r_m$进入$B$的概率。) 对$m$作归纳法可证

$$P(s,t,x,B)=\sum_{j=1}^{m}\int_{A}G_j(x,dy)P(r_j,t,y,B)$$

$$+\int_{E-A}G_m(x,dy)P(r_m,t,y,B),\quad(1\leqslant m\leqslant n,B\in\mathscr{E}),\tag{2.9}$$

事实上，$m=1$时(2.9)显然成立．设(2.9)对$m-1$成立，则由$G_j(y,B)$的定义及$(K-C)$方程式及Fubini定理有

$$P(s,t,x,B)=\sum_{j=1}^{m-1}\int_{A}G_j(x,dy)P(r_j,t,y,B)$$

$$+\int_{E-A}G_{m-1}(x,dy)P(r_{m-1},t,y,B)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\int_{A}G_j(x,dy)P(r_j,t,y,B)$$

$$+\int_{E-A}G_m(x,dy)P(r_m,t,y,B)$$

$$+\int_{E-A}G_{m-1}(x,dy)P(r_{m-1},t,y,B)$$

$$-\int_{E}G_m(x,dy)P(r_m,t,y,B)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\int_{A}G_j(x,dy)P(r_j,t,y,B)$$

$$+\int_{E-A}G_m(x,dy)P(r_m,t,y,B).$$

在(2.9)中取$m=n$，$B=A$，并注意$x\bar{\in}A$，$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$，及(2.8)可得

$$\varepsilon>P(s,t,x,A)\geqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{A}G_j(x,dy)P(r_j,t,y,A)$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \int_A G_j(x,dy)(1-\varepsilon).$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n} G_j(x, A) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{2.10}$$

在(2.9)中取$B=\{x\}$，即得

$$P(s,t,x,\{x\}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} G_j(x,A) + G_m(x,\{x\})$$

$$+ \int_{E-(A\cup\{x\})} G_m(x,dy)P(r_m,t,y,\{x\}). \tag{2.11}$$

对m作归纳法易证：

$$G_m(x,B) \leqslant P(r_0,r_m,x,B). \tag{2.12}$$

由(2.8)和(2.12)得

$$\int_{E-(A\cup\{x\})} G_m(x,dy)P(r_m,t,y,\{x\}) \leqslant \varepsilon. \tag{2.13}$$

以(2.10)、(2.13)代入(2.11)并注意(2.8)得

$$G_m(x, \{x\}) \geqslant (1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon > \frac{1-8\varepsilon}{1-\varepsilon}, \ (0 \leqslant m \leqslant n). \tag{2.14}$$

由$G_m(y,B)$的定义有

$$G_j(x,c) \geqslant G_{j-1}(x,\{x\})P(r_{j-1},r_j,x,c), (j=1,\cdots,n), \tag{2.15}$$

在(2.9)中取$B=A$，$m=n$，并注意(2.8)、(2.14)、(2.15)可得

$$P(s,t,x, A) \geqslant \sum_{j=1}^{n} G_{j-1}(x, \{x\})$$

$$\cdot \int_A P(r_{j-1},r_j,x,dy)P(r_j,t,y,A)$$

$$\geqslant\frac{1-8\varepsilon}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}\int_{A}P(r_{j-1},r_j,x,dy)$$

$$=(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,A).$$

命题2.4 若标准的非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$满足

$$\lim_{(t-s)\to 0+}\sup_{y\in E}[1-P(s,t,y,\{y\})]=0, \qquad (2.16)$$

任取$x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $x\bar{\in}A$, 则对任何$0<\varepsilon<\frac{1}{16}$, 存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,x,A)>0$, 使得：只要$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$, 那么对$[s,t]$的任一分割$\mathscr{D}(s,t)=\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}$, 有

$$P(s,t,x,A)\leqslant\sum_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,A)$$

$$+8\varepsilon\sum_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,E-(A\cup\{x\})). \qquad (2.17)$$

证：由命题2.3知：存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,x,A)>0$, 只要$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$, 有

$$P(s,t,x,E-(A\cup\{x\}))$$

$$\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,E-(A\cup\{x\})). \qquad (2.18)$$

注意：对任何标准的非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$, (2.9)是恒等式。在(2.9)中取$B=A=E-\{x\}$, $m=n$, 即得

$$P(s,t,x,E-\{x\})=\sum_{j=1}^{n}\int_{E-\{x\}}G_j(x,dy)P(r_j,t,y,E-\{x\})$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}G_j(x,E-\{x\})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}G_{j-1}(x,\{x\})P(r_{j-1},r_j,x,E-\{x\})$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} P(r_{j-1}, r_j, x, E-\{x\}). \tag{2.19}$$

(2.19)减(2.18)即得(2.17)。

§3 非时齐的准转移函数的可微性

定理3.1 设非时齐的转移函数 $P(s, t, x, A)$ 满足 (1.1)* (从而它必满足 (1.1), 即它必是标准的), 固定任意 $x\in E$, 令 $f(s,t)=-\log P(s,t,x,\{x\})$,

$$T(1-P)=\left\{u: u\geqslant 0, \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{1-P(s,t,x,\{x\})}{t-s} \text{ 存在}\right\},$$

$$T(f)=\left\{u: u\geqslant 0, \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{f(s,t)}{t-s} \text{ 存在}\right\},$$

$T(I_f)$、$T(V_f)$ 类似地定义, I_f, V_f 之定义见 § 2, 则

(1) $T(1-P)=T(f)=T(I_f)=T(V_f)$, (3.1)

且当 $u\in T(f)$ 时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{1-P(s,t,x,\{x\})}{t-s}=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{f(s,t)}{t-s}$$

$$=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{V_f(s,t)}{t-s}=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{I_f(s,t)}{t-s}. \tag{3.2}$$

(2) 存在 Lebesgue 零测集 $N(x)$, 使 $u\bar{\in} N(x)$ 时

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{I_f(s,t)}{(t-s)}$$

存在且有限。

(3) 当 $u\bar{\in} N(x)$ 时,

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{1-P(s,t,x,\{x\})}{t-s}=q(u,x) \tag{3.3}$$

存在且有限, 更有

$$\lim_{t\downarrow u}\frac{1-P(u,t,x,\{x\})}{t-u}=q(u,x),\ (u\overline{\in}N(x)),\quad (3.4)$$

$$\lim_{s\uparrow u}\frac{1-P(s,u,x,\{x\})}{u-s}=q(u,x),\ (u\overline{\in}N(x),\ u>0).\quad (3.5)$$

证：由命题2.2知 $I_f(s,t)=V_f(s,t)$ 存在，且有

$$f(s,t)\leqslant I_f(s,t)=V_f(s,t),\ (0\leqslant s\leqslant t<\infty).\quad (3.6)$$

由 $P(s,t,x,A)$ 满足（1.1)* 及命题2.3知：对任何 $0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，存在 $\tau_0=\tau_0(\varepsilon,x)>0$，使得$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$ 时有

$$P(s,t,x,E-\{x\})\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,E-\{x\}).\quad (3.7)$$

再用 $P(s,t,x,E)\equiv 1$ 可知

$$P(s,t,x,\{x\})\leqslant 1-(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}[1-P(r_{j-1},r_j,x,\{x\})].\quad (3.8)$$

对 n 作归纳法并注意 $r_0=s$，$r_n=t$，由（3.8）可证：

$$P(s,t,x,\{x\})\leqslant 8\varepsilon+(1-8\varepsilon)\prod_{j=1}^{n}P(r_{j-1},r_j,x,\{x\}).\quad (3.9)$$

若令

$$f_1(s,t)=-\log[(P(s,t,x,\{x\})-8\varepsilon)/(1-8\varepsilon)],$$

则由（3.9）有

$$f_1(s,t)\geqslant\sum_{j=1}^{n}f(r_{j-1},r_j),\quad (3.10)$$

从而由 $I_f(s,t)=V_f(s,t)$ 的存在性及$\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}$是$[s,t]$的任一分割得知

$$f_1(s,t)\geqslant I_f(s,t),\quad (0\leqslant t-s\leqslant \tau_0).\tag{3.11}$$

由 (3.6)、(3.11) 得

$$f(s,t)\leqslant I_f(s,t)=V_f(s,t)\leqslant f_1(s,t),\quad (0\leqslant t-s\leqslant \tau_0),\tag{3.12}$$

所以任取$u\in T(I_f)$，有

$$\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{f(s,t)}{t-s}\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_f(s,t)}{t-s}$$
$$=\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_f(s,t)}{t-s}\leqslant\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{f_1(s,t)}{t-s}.\tag{3.13}$$

若注意

$$\frac{\alpha-8\varepsilon}{1-8\varepsilon}\geqslant\alpha^{(1+18\varepsilon)},\quad \left(\alpha\in[\alpha_0,1],\ 0<\varepsilon<\frac{1}{16},\ \alpha_0\text{是 (0, 1) 中某个固定的数}\right)$$

及 $f_1(s,t)$ 的定义有

$$\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{f_1(s,t)}{(t-s)}$$
$$=\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{-1}{(t-s)}\log\frac{P(s,t,x,\{x\})-8\varepsilon}{(1-8\varepsilon)}$$
$$\leqslant\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{(1+18\varepsilon)}{(t-s)}(-\log P(s,t,x,\{x\}))$$
$$=\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}(1+18\varepsilon)\frac{f(s,t)}{t-s}.\tag{3.14}$$

由 (3.13)、(3.14) 和 $\varepsilon>0$ 可任意小得知 $u\in T(f)$ (即 $T(I_f)\subset T(f)$) 且

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{f(s,t)}{(t-s)}=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_f(s,t)}{(t-s)}.\tag{3.15}$$

仿之可证 $T(f)\subset T(I_f)$。总之 $T(f)=T(I_f)=T(V_f)$，且 $u\in T(f)$ 时 (3.2) 后面二等式成立。

显然，

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{1-P(s,t,x,\{x\})}{t-s} \text{ 与 } \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{f(s,t)}{t-s}$$

或者都不存在，或若同时存在且相等。总之，(1) 得证。

(2) 由 (3.12) 知 $I_f(s,t)$ 在$0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$上有限，由命题2.1知：任意固定$a$，$\psi(v)=I_f(a,v)$ $(a\leqslant v\leqslant a+\tau_0)$ 是单调非降实值函数，故对$(a,a+\tau_0)$中几乎所有的u，有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_f(s,t)}{t-s}=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{\psi(t)-\psi(s)}{t-s}$$

存在且非负有限。由于 a 可以任意，$\tau_0>0$，故对 $[0,\infty)$ 中几乎所有的 u，$\lim\limits_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_f(s,t)\Big/(t-s)$ 存在且非负有限。

(3) 由 (1)、(2) 得 (3.3)，由 (3.3) 得 (3.4) 及 (3.5)。定理证毕。

定理3.2 设非时齐的转移函数 $P(s,t,x,A)$ 满足 (1.1)*，固定任意 $x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，$x\overline{\in}A$，令

$$g(s,t)=P(s,t,x,A),\quad h(s,t)=P(s,t,x,E-\{x\}),\tag{3.16}$$

则

(1) $I_g(a,b)$、$I_h(a,b)$ 存在且有限，$(0\leqslant a\leqslant b<\infty)$；

(2) $\overline{N(x)}\cap T(g)=\overline{N(x)}\cap T(I_g)$，且 $u\in\overline{N(x)}\cap T(g)$ 时

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{g(s,t)}{t-s}=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_g(s,t)}{t-s},$$

(其中 $N(x)$、$T(g)$、$T(I_g)$ 的定义见定理 3.1，$\overline{N(x)}=[0,\infty)-N(x)$)

(3) 存在Lebesgue零测集$N(x,A)$，当$u\overline{\in}N(x,A)$时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_g(s,t)}{(t-s)}=q(u,x,A) \text{ 存在且非负有限；}$$

(4) 当$u\overline{\in}N(x,A)$时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} \frac{p(s,t,x,A)}{(t-s)} = q(u,x,A), \tag{3.17}$$

更有

$$\lim_{t\downarrow u} \frac{P(u,t,x,A)}{t-u} = q(u,x,A), (u \overline{\in} N(x,A)), \tag{3.18}$$

$$\lim_{s\uparrow u} \frac{P(s,u,x,A)}{u-s} = q(u,x,A), \begin{pmatrix} u \overline{\in} N(x,A) \\ u>0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

证：(1) 令 $g_B(s,t)=p(s,t,x,B)$，$(B\in\mathscr{E},\ x\overline{\in}B)$。任给 $0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，由命题 2.3 得知：存在 $\tau_0=\tau_0(\varepsilon,x,B)>0$，对 $[a,b]$ 的任一分割 $\mathscr{D}(a,b)=\{s_0,s_1,\cdots,s_n\}$，只要 $l(\mathscr{D})<\tau_0$，那么对 $[a,b]$ 的其它任意分割 $\widetilde{\mathscr{D}}(a,b)=\{t_0,t_1,\cdots,t_m\}$，都有

$$\sigma_{g_B}(\mathscr{D}(a,b)) \geqslant (1-8\varepsilon)\sigma_{g_B}((\mathscr{D}\cup\widetilde{\mathscr{D}})(a,b)). \tag{3.20}$$

若令 $l(j)=\min\{i: t_i\geqslant s_j\}$，$(j=1,\cdots,n-1)$，则有

$$\sigma_{g_B}((\mathscr{D}\cup\widetilde{\mathscr{D}})(a,b)) = \sigma_{g_B}(\widetilde{\mathscr{D}}(a,b))$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}(g_B(t_{l(j)-1},s_j)+g_B(s_j,t_{l(j)})-g_B(t_{l(j)-1},t_{l(j)})).$$

注意

$$\max\{(t_{l(j)}-s_j),(s_j-t_{l(j)-1}),(t_{l(j)}-t_{l(j)-1})\}\leqslant l(\widetilde{\mathscr{D}}),$$

所以，在 (3.20) 中令 $l(\widetilde{\mathscr{D}})\to 0$ 由 $\lim\limits_{(t-s)\to 0+} g_B(s,t)=0$ 可得

$$\infty > \sigma_{g_B}(\mathscr{D}(a,b)) \geqslant (1-8\varepsilon)\limsup_{l(\widetilde{\mathscr{D}})\to 0}\sigma_{g_B}(\widetilde{\mathscr{D}}(a,b)).$$

因此，在上式中令 $l(\mathscr{D})\to 0$ 取下极限并注意 $\varepsilon>0$ 可任意小即可知 $I_{g_B}(a,b)$ 存在且有限。(1) 证毕。

(2) 由命题2.3、2.4知：对任何 $0<\varepsilon<\frac{1}{16}$，存在 $\tau_0=\tau_0(\varepsilon,$

$x,A)>0$，使 $0\leqslant t-s\leqslant\tau_0$ 时有

$$(1-8\varepsilon)I_g(s,t)\leqslant g(s,t)\leqslant I_g(s,t)+8\varepsilon I_h(s,t). \quad (3.21)$$

所以若取 $u\in\overline{N(x)}\cap T(I_g)$，则由

$$(1-8\varepsilon)\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)/(t-s)$$

$$\leqslant\liminf_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)/(t-s)$$

$$\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)/(t-s)$$

$$\leqslant\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)/(t-s)$$

$$+\limsup_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} 8\varepsilon\frac{1-P(s,t,x,\{x\})}{(t-s)},$$

及

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{1-P(s,t,x,\{x\})}{t-s}=q(u,x)$$

是有限数和

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{I_g(s,t)}{t-s}=q(u,x,A)$$

存在且 $\varepsilon>0$ 可以任意小即得

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)/(t-s)=\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)/(t-s)=q(u,x,A)$$ 存

在。仿之，任取 $u\in\overline{N(x)}\cap T(g)$，也可证：

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} I_g(s,t)/(t-s) \text{ 存在且等于 } \lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}} g(s,t)/(t-s).$$

至此，(2) 证毕。

(3) 由 $I_g(s,t)$ 存在且有限 ($0\leqslant s\leqslant t<\infty$)，仿定理3.1 (2) 可得本定理的 (3)。

(4) 由(3)即得(4)。定理3.2证毕。

定理3.3 设非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$ 满足(1.1)*，

则对任何$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，存在一个Lebesgue 零测集$N(x, A)$，使$u\bar{\in}N(x, A)$时有

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{P(s,t,x,A)-I_A(x)}{t-s}$$

$$=-I_A(x)q(u, x)+q(u,x,A-\{x\}), \tag{3.22}$$

更有：

$$\lim_{t\downarrow u}\frac{P(u,t,x,A)-I_A(x)}{t-u}=-I_A(x)q(u,x)+q(u,x,A-\{x\}), \tag{3.23}$$

$$\lim_{s\uparrow u}\frac{P(s,u,x,A)-I_A(x)}{u-s}=-I_A(x)q(u,x)+q(u,x, A-\{x\}), \tag{3.24}$$

其中$q(u,x)$，$q(u,x,A)$是非负实值函数。

证：若$P(s,t,x,E)\equiv 1$，则由定理 3.1、3.2 即得 (3.22)、(3.23)、(3.24)成立。取消“$P(s,t,x,E)\equiv 1$”的假设。取$x^*\bar{\in}E$，令$E^*=E\cup\{x^*\}$，$\mathscr{E}^*=\{A:\ A\in\mathscr{E}\text{或}A=B\cup\{x^*\},\ B\in\mathscr{E}\}$，

$$P^*(s,t,x,A)$$

$$=\begin{cases}I_A(x), & \text{当}x=x^*,\\ P(s,t,x,A\cap E)+I_A(x^*)(1-P(s,t,x,E)), & \text{反之},\end{cases}$$

则$P^*(s,t,x,A)$是可测空间$(E^*, \mathscr{E}^*)$上的非时齐的转移函数且满足(1.1)*，所以对P^*而言，(3.22)、(3.23)和(3.24)成立，从而对P而言，(3.22)、(3.23)和(3.24)更成立。

定理3.4 设非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$满足 (1.1)*，且对任何$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，存在$r_0=r_0(x, A)>0$，使

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{P(s+\rho,t+\rho,x,A)-I_A(x)}{P(s,t,x,A)-I_A(x)}=1^{①}\ (\text{对 }0\leqslant t-s\leqslant r_0\text{一致}), \tag{3.25}$$

---

① 此处 $\frac{0}{0}$定义为1。

则对任何$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，$u\geqslant 0$，(3.22)、(3.23)、(3.24)成立。而且$q(u,x)$，$q(u,x,A)$满足

(i) 固定$u\geqslant 0$，$q(u,\cdot)$是x的$\mathscr{E}$可测实值函数；

(ii) 固定$x\in E$，$q(\cdot,x)$是u的连续函数；

(iii) 固定$u\geqslant 0$，$x\in E$，$q(u,x,\cdot)$是

$$\widetilde{\mathscr{E}}_x=\{A:\ A\in\mathscr{E},\ x\bar{\in}A\}$$

上的有限测度；

(iv) 固定$u\geqslant 0$，$A\in\mathscr{E}$，$q(u,\cdot,A)$是x的$\mathscr{E}$可测实值函数；

(v) 固定$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，$q(\cdot,x,A)$是u的连续函数。

注意：(3.25)等价于：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{P(s,t,x,A)-I_A(x)}{P(s+\rho,t+\rho,x,A)-I_A(x)}=1\ \ (\text{对}0\leqslant t-s\leqslant r_0\text{一致})，\tag{3.25*}$$

证：任取$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$固定。由(3.25)和(3.25)*得知：任给$\varepsilon>0$，存在$\rho_0>0$，当$0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，$0\leqslant t-s\leqslant r_0$有

$$|P(s,t,x,A)-P(s+\rho,\ t+\rho,\ x,\ A)|\leqslant\min\{\varepsilon|I_A(x)-P(s,t,x,A)|,\ \varepsilon|I_A(x)-P(s+\rho,\ t+\rho,\ x,\ A)|\}。\tag{3.26}$$

今任取$u_0\geqslant 0$，总有ρ^*使$u_0+\rho^*\in[u_0,\ u_0+\rho_0]\cap\overline{N(x,A)}$，($\overline{N(x,A)}$之定义见定理3.3)从而由定理3.3得

$$\lim_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\frac{1}{t-s}(P(s+\rho^*,t+\rho^*,x,A)-I_A(x))$$

$$=\lim_{\substack{(u_0+\rho^*)\in[s+\rho^*,t+\rho^*]\\(t-s)\to 0+}}\frac{1}{(t+\rho^*)-(s+\rho^*)}(P(s+\rho^*,t+\rho^*,x,A)-I_A(x))=q(u_0+\rho^*,x,A)-I_A(x)q(u_0+\rho^*,x)\xlongequal{\text{记作}}q_0^*\tag{3.27}$$

存在且有限。因此，由(3.26)和(3.27)有

$$\limsup_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}} (P(s,t,x,A)-I_A(x))/(t-s)$$

$$\leqslant \limsup_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}} \left[\frac{P(s+\rho^*,t+\rho^*,x,A)-I_A(x)}{(t-s)} + \frac{\varepsilon|I_A(x)-P(s+\rho^*,t+\rho^*,x,A)|}{(t-s)}\right]$$

$$=\liminf_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\left[\frac{P(s+\rho^*,t+\rho^*,x,A)-I_A(x)}{(t-s)}+\varepsilon|q_0^*|\right]$$

$$\leqslant \liminf_{\substack{[s,t]\ni u_0\\(t-s)\to 0+}}\left[\frac{P(s,t,x,A)-I_A(x)}{(t-s)}+\varepsilon|q_0^*|+\varepsilon|q_0^*|\right]. \qquad (3.28)$$

由$\varepsilon>0$可任意小，而q_0^*是有限数，$u_0\geqslant 0$可任意；由(3.28)及(3.27)可得(3.22)、(3.23)、(3.24)成立。

下面证明$q(u,x)$、$q(u,x,A)$满足(i)—(v)。

(i) 可由定理1.1即得。至于(ii)，由(3.26)有

$$\limsup_{\rho\to 0}|q(u,x)-q(u+\rho,x)|$$

$$=\limsup_{\rho\to 0}\left|\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{P(s+\rho,t+\rho,x,\{x\})-P(s,t,x,\{x\})}{(t-s)}\right|$$

$$\leqslant \limsup_{\rho\to 0}\left|\lim_{\substack{[s,t]\ni u\\(t-s)\to 0+}}\frac{\varepsilon(1-P(s,t,x,\{x\}))}{t-s}\right|$$

$$=\varepsilon q(u,x),$$

而$\varepsilon>0$可任意小，$q(u,x)$是有限数，所以$q(\cdot,x)$是u的连续函数。(ii)证毕。(iv)、(v)仿(i)、(ii)可证。而(iii)由第一编引理7.3即可得到。

定理3.5 若非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$满足$\lim\limits_{(t-s)\to 0+} P(s,t,x,A)=I_A(x)$，则

(1) $\displaystyle \lim_{\tau\to 0+}\sup_{t\geqslant\tau}\left(\frac{1-P(t-\tau,t,x,\{x\})}{\tau}\right)$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}(1-\inf_{t\geq\tau}p(t-\tau,t,x,\{x\}))$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}(1-\inf_{t\geq 0}p(t,t+\tau,x,\{x\}))$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}\sup_{t\geq 0}(1-p(t,t+\tau,x,\{x\}))=\overline{q}(x) \quad (3.29)$$

存在(可能为∞)；

(2) $\inf\limits_{t\geq\tau} p(t-\tau,t,x,\{x\})$

$$=\inf_{t\geq 0} p(t,t+\tau,x,\{x\})\geq e^{-\overline{q}(x)\tau}, \quad (3.30)$$

(3) $\overline{q}(\cdot)$是x的$\mathscr{E}$可测函数。

证：令$f(\tau)=\sup\limits_{t\geq\tau}(-\log p(t-\tau,t,x,\{x\}))$，$(\tau\geq 0)$，则$f(\tau)$是$[0,\infty)$上的非负广义实值函数，由$(K-C)$方程式及定理假设得知$f(\tau)$满足

(i) 半可加性：

$$\begin{aligned}f(u+v)&\leq\sup_{t\geq u+v}(-\log p(t-u-v,\ t-u,\ x,\ \{x\}))\\&\quad+\sup_{t\geq u+v}(-\log p(t-u,\ t,\ x,\ \{x\}))\\&\leq\sup_{t-u\geq v}(-\log p(t-u-v,\ t-u,\ x,\ \{x\}))\\&\quad+\sup_{t\geq u}(-\log p(t-u,\ t,\ x,\ \{x\}))\\&=f(u)+f(v),\quad(u\geq 0,\ v\geq 0),\end{aligned}$$

(ii) 连续性：$\lim\limits_{v\to 0+}f(v)=0$。

所以，由第一编引理7.1得：

$$\lim_{\tau\to 0+}\frac{f(\tau)}{\tau}=\sup_{\tau>0}\frac{f(\tau)}{\tau}=\overline{q}(x)$$

存在(可为∞)。因此，

$$f(\tau)=\overline{q}(x)\tau+0(\tau),\ (\tau\to 0+), \quad (3.31)$$

$$f(\tau)\leqslant \bar{q}(x)\tau, \qquad (\tau\geqslant 0), \tag{3.32}$$

由(3.31)得$\inf\limits_{t\geqslant\tau} P(t-\tau, t, x, \{x\})=e^{-f(\tau)}=e^{-\bar{q}(x)\tau}+0(\tau)$, $(\tau\to 0+)$, 从而(1)得证。由(3.32)得(2)。由定理1.1得(3)。

定理3.6 对任何标准的非时齐的准转移函数 $P(s,t,x,A)$, 任取$x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $x\bar{\in}A$,若

$$\lim_{(t-s)\to 0+}\sup_{y\in A}[1-P(s,t,y,\{y\})]=0,$$

则

$$\lim_{\tau\to 0+}\frac{\inf\limits_{t\geqslant\tau}P(t-\tau,t,x,A)}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0+}\frac{\inf\limits_{t\geqslant 0}P(t,t+\tau,x,A)}{\tau}=\bar{q}(x,A) \tag{3.33}$$

存在且有穷。

证: 任取$u>0$, $\tau>0$, 令$n=\left[\dfrac{\tau}{u}\right]$, ($[\alpha]$表不大于$\alpha$的最大整数), 取 $[t-\tau, t]$ 的分割 $\mathscr{D}(t-\tau, t)=\{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$, $r_j=t-\tau+ju$, $(j=0,1,\cdots,n)$。由命题2.3得知: 对任何 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{16}$,存在$\tau_0=\tau_0(\varepsilon,x,A)>0$, 只要$0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$,就有

$$P(t-\tau,t,x,A)$$

$$\geqslant(1-8\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}P(t-\tau+(j-1)u,\ t-\tau+ju,x,A),$$

更有

$$\frac{1}{\tau}\inf_{t\geqslant\tau}P(t-\tau,t,x,A)$$

$$\geqslant\frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau}\inf_{t\geqslant\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{P(t-\tau+(j-1)u,t-\tau+ju,x,A)}{u}$$

$$\geqslant \frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau}\sum_{j=1}^{n}\inf_{t\geqslant\tau-(j-1)u}\frac{P(t-\tau+(j-1)u,t-\tau+ju,x,A)}{u}$$

$$=\frac{(1-8\varepsilon)u}{\tau}n\inf_{t\geqslant u}\frac{P(t-u,t,x,A)}{u}. \qquad (3.34)$$

若注意$\lim\limits_{u\to0+}\frac{nu}{\tau}=1$，在(3.34)中先取$u\to0+$取上极限，次对$\tau\to0+$取下极限，并注意$\varepsilon>0$可任意小，即可得(3.33)成立且$\bar{q}(x,A)$有穷。

定理3.7 对任何满足(1.1)*的非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$，若$\inf\limits_{t\geqslant\tau}P(t-\tau,t,x,\cdot)$具有有限加性，则

$$\lim_{\tau\to0+}\frac{\inf\limits_{t\geqslant\tau}P(t-\tau,t,x,A)-I_A(x)}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to0+}\frac{\inf\limits_{t\geqslant0}P(t,t+\tau,x,A)-I_A(x)}{\tau}$$

$$=-I_A(x)\bar{q}(x)+\bar{q}(x,A-\{x\}),(x\in E,A\in\mathscr{E}),$$

还有

(1) $0\leqslant\bar{q}(x)\leqslant\infty$，$\bar{q}(\cdot)$是$\mathscr{E}$可测的；

(2) 固定$x\in E$，$\bar{q}(x,\cdot)$是$\widetilde{\mathscr{E}}_x$上的有限测度，固定$A\in\widetilde{\mathscr{E}}_x$，$\bar{q}(\cdot,A)$是$\mathscr{E}$可测的。($\widetilde{\mathscr{E}}_x$之定义见定理3.4.)

证：只证$\bar{q}(x,\cdot)$是$\widetilde{\mathscr{E}}_x$上的有限测度，其它结论由定理3.5和3.6即得。若注意$\frac{1}{\tau}\inf\limits_{t\geqslant\tau}P(t-\tau,t,x,\cdot)$是$\widetilde{\mathscr{E}}_x$上的有限测度，($\tau>0$)，则由第一编引理7.3即得$\bar{q}(x,\cdot)$是$\widetilde{\mathscr{E}}_x$上的有限测度。

§4 Kolmogorov 方程式

定义4.1 若标准的非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$满足：

(1) $\lim\limits_{t\to u+0} \dfrac{P(u,t,x,A)-I_A(x)}{t-u} = \tilde{q}(u,x,A)$, (4.1)

$(u\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$存在且有限；

(2) $\lim\limits_{u\to t-0} \dfrac{P(u,t,x,A)-I_A(x)}{t-u} = \tilde{q}(t,x,A)$, (4.2)

$(t>0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(3) 固定$t\geqslant 0$, $x\in E$, $\tilde{q}(t,x,\cdot)$ 是$\mathscr{E}$上的具有可数可加的集合函数，而且

$0\leqslant \tilde{q}(t,x,A)<\infty$, $(t\geqslant 0, x\in E, x\bar{\in} A\in\mathscr{E})$,

$0\leqslant -\tilde{q}(t,x,\{x\})<\infty$, $(t\geqslant 0, x\in E)$,

$\tilde{q}(t,x,E)\leqslant 0$, $(t\geqslant 0, x\in E)$；

(4) 固定 $t\geqslant 0$, $A\in\mathscr{E}$, $\tilde{q}(t,\cdot,A)$ 是$\mathscr{E}$可测实值函数，

则称 $P(s,t,x,A)$ 是可微的，$\tilde{q}$ 称为其转移密度函数。撇开$P(s,t,x,A)$，任意一个满足条件 (3)、(4) 的$\tilde{q}(t,x,A)$，我们都称之为可测空间$(E,\mathscr{E})$ 上的一个q函数。

由定理3.4得知：满足 (1.1)*和 (3.25) 的 $P(s,t,x,A)$ 是可微的，其转移密度函数为

$$\tilde{q}(t,x,A) = -I_A(x)q(t,x)+q(t,x,A-\{x\}).$$

定理4.1 若 $P(s,t,x,A)$ 可微，则

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t,x,A) = -\int_E \tilde{q}(s,x,dy)P(s,t,y,A), \quad (4.3)$$

$(s\in[0,t],\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$.

证：任取 $s\in[0,t)$, $\Delta s>0$, $s+\Delta s\leqslant t$, 有

$$\frac{1}{\Delta s}(P(s+\Delta s,t,x,A)-P(s,t,x,A))$$

$$=\frac{1-P(s,s+\Delta s,x,\{x\})}{\Delta s}P(s+\Delta s,t,x,A)$$

$$-\int_{E-\{x\}}\frac{P(s,s+\Delta s,x,dy)}{\Delta s}P(s+\Delta s,t,y,A),$$

由可微性假设及第一编引理7.3和定理1.2得

$$\lim_{\Delta s\to 0+}\frac{1}{\Delta s}(P(s+\Delta s,t,x,A)-P(s,t,x,A))$$
$$=-\int_E \widetilde{q}(s,x,dy)P(s,t,y,A).$$

再取 $s\in(0,t]$, $\Delta s>0$, $s-\Delta s\geqslant 0$, 我们有

$$\frac{1}{\Delta s}(P(s,t,x,A)-P(s-\Delta s,t,x,A))$$
$$=\frac{1-P(s-\Delta s,s,x,\{x\})}{\Delta s}P(s,t,x,A)$$
$$-\int_{E-\{x\}}\frac{P(s-\Delta s,s,x,dy)}{\Delta s}P(s,t,y,A).$$

仍用可微性假设及第一编引理7.3得:

$$\lim_{\Delta s\to 0+}\frac{1}{\Delta s}(P(s,t,x,A)-P(s-\Delta s,t,x,A))$$
$$=-\int_E \widetilde{q}(s,x,dy)P(s,t,y,A).$$

定理4.2 在定理3.4的条件下,(4.3)式成立,而且$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t,x,A)$在$\mathscr{D}^*=\{(s,t):\ 0\leqslant s\leqslant t<\infty\}$上是$s$, t的二元连续函数。

证: 由定理3.4及定理4.1即得(4.3)式成立,且$\widetilde{q}(\cdot,x,A)$在$s\geqslant 0$上连续,又因为由定理1.2得知$P(s,t,x,A)$对s来说在$s\in[0,t]$连续,而且这种连续对t还是等度的,所以,由第一编引理7.3得知(4.3)式右端是s的连续函数,而且这种连续对t来说是等度的。而(4.3)右端对t来说在$t\in[s,\infty)$上连续由定理1.2及控制收敛定理即可得。总之,(4.3)右端在$\mathscr{D}^*$上是s, t的二元连续函数。

定理4.3 设$P(s,t,x,A)$可微且满足(1.1)*及

$$\sup_{y\in E}|\bar{q}(y)|\leqslant c<\infty,\ (\bar{q}\text{的定义见定理3.5}), \qquad (S)$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t,x,A)=\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A), \qquad (4.4)$$

$(0\leqslant s\leqslant t<\infty,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$.

证：任取$0\leqslant s\leqslant t-\Delta t\leqslant t$，$\Delta t>0$，由定理3.5有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t}(1-P(t-\Delta t,t,y,\{y\}))\\ \leqslant&\frac{1}{\Delta t}(1-\inf_{t\geqslant\Delta t}P(t-\Delta t,t,y,\{y\}))\\ \leqslant&\frac{1}{\Delta t}(1-e^{-\bar{q}(y)\Delta t})\leqslant\bar{q}(y)\leqslant c,\end{aligned} \qquad (4.5)$$

$(y\in E,\ \Delta t>0,\ t>0)$.

类似地有

$$\frac{1}{\Delta t}(1-P(t,t+\Delta t,y,\{y\}))\leqslant c, \qquad (4.6)$$

$(y\in E,\ \Delta t>0,\ t\geqslant 0)$.

由(4.5)、(4.6)得

$$\sup_{\substack{t\geqslant 0\\ y\in E}}|\tilde{q}(t,y,\{y\})|\leqslant c,$$

从而

$$\sup_{t\geqslant 0,\ y\in E;\ A\in\mathscr{E}}|\tilde{q}(t,y,A)|\leqslant c. \qquad (4.7)$$

由(4.7)再用第一编引理7.3得：

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0+}\int_E P(s,t-\Delta t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A)\\ =&\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A).\end{aligned} \qquad (4.8)$$

因此，

$$\limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\frac{P(s,t,x,A)-P(s,t-\Delta t,x,A)}{\Delta t}-\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A)\right|$$

$$\leqslant \limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\frac{P(s,t,x,A)-P(s,t-\Delta t,x,A)}{\Delta t}\right.$$

$$\left.-\int_E P(s,t-\Delta t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A)\right|$$

$$=\limsup_{\Delta t\to 0+}\left|\int_A P(s,t-\Delta t,x,dy)\left(\frac{P(t-\Delta t,t,y,A)-1}{\Delta t}\right.\right.$$

$$\left.-\tilde{q}(t,y,A)\right)+\int_{E-A}P(s,t-\Delta t,x,dy)$$

$$\left.\cdot\left(\frac{P(t-\Delta t,t,y,A)}{\Delta t}-\tilde{q}(t,y,A)\right)\right|. \quad (4.9)$$

但是由（4.5)、(4.7）有

$$\left|\frac{1}{\Delta t}(P(t-\Delta t,t,y,A)-1)-\tilde{q}(t,y,A)\right|\leqslant 3c, \quad (4.10)$$

$(t>0,\Delta t>0,y\in E,A\in\mathscr{E},y\in A)$,

$$\left|\frac{1}{\Delta t}P(t-\Delta t,t,y,A)-\tilde{q}(t,y,A)\right|\leqslant 2c, \quad (4.11)$$

$(t>0,\Delta t>0,y\in E,A\in\mathscr{E},y\bar{\in}A)$.

由（4.10)、(4.11)、定理1.2及可微性假设并利用第一编引理7.3有

$$\limsup_{\Delta t\to 0+}\int_A P(s,t-\Delta t,x,dy)\left(\frac{P(t-\Delta t,t,y,A)-1}{\Delta t}\right.$$

$$\left.-\tilde{q}(t,y,A)\right)=\limsup_{\Delta t\to 0+}\int_{E-A}P(s,t-\Delta t,x,dy)$$

$$\cdot\left(\frac{P(t-\Delta t,t,y,A)}{\Delta t}-\tilde{q}(t,y,A)\right)=0.$$

以此代入（4.9）得：

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{P(s,t,x,A)-P(s,t-\Delta t,x,A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A),\ (0\leqslant s<t<\infty,x\in E,A\in\mathscr{E}).$$

仿之可证（在用（4.5）的地方改用（4.6））：

$$\lim_{\Delta t \to 0-} \frac{P(s,t+\Delta t,x,A)-P(s,t,x,A)}{\Delta t}$$

$$=\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A),\ (0\leqslant s\leqslant t<\infty, x\in E, A\in\mathscr{E}).$$

定理证毕。

定理4.4 在定理3.4的条件下，若定理4.3的（s）亦成立，则（4.4）成立，而且$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t,x,A)$在$\mathscr{D}^*$上是$s$，$t$的二元连续函数。

证：在定理3.4的条件下，$P(s,t,x,A)$在$\mathscr{D}^*$上是s，t的二元连续函数，$\tilde{q}(\cdot,y,A)$在$t\geqslant 0$上连续。由条件（s）知（4.7）成立，所以由第一编引理7.3得

$$\lim_{\substack{(s,t)\to(s_0,t_0)\\(s,t),(s_0,t_0)\in\mathscr{D}^*}} \int_E (P(s,t,x,dy)-P(s_0,t_0,x,dy))\tilde{q}(t,y,A)=0,$$

$$\lim_{\substack{(s,t)\to(s_0,t_0)\\(s,t),(s_0,t_0)\in\mathscr{D}^*}} \int_E P(s_0,t_0,x,dy)(\tilde{q}(t,y,A)-\tilde{q}(t_0,y,A))=0.$$

总上二式知（4.4）右端在$\mathscr{D}^*$上是s，t的二元连续函数。定理证毕。

§5 拉氏变换

本节将要研究标准准转移函数$P(s,t,x,A)$的拉氏变换及其性质。

定义5.1 设$P(s,t,x,A)$是可测空间$(E,\mathscr{E})$上任一标准准转移函数，称

$$R(\lambda,s,x,A)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}P(s,s+t,x,A)dt \qquad (5.1)$$

（$\lambda>0$，$s\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）为 $P(s,t,x,A)$ 的右拉氏变换。（注意：由于 $P(s,t,x,A)$ 是t的有界右连续函数，故（5.1）右端积分存在。）称

$$Q(\lambda,s,x,A)=\int_0^{s}e^{-\lambda u}P(u,s,x,A)du \qquad (5.2)$$

（$\lambda\in(-\infty,\infty)$，$s\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）为 $P(s,t,x,A)$ 的左拉氏变换。（注意：由于 $P(s,t,x,A)$ 是 s 的连续函数，故（5.2）右端积分存在。）称

$$\Psi(\lambda,\mu,x,A)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda s}R(\mu,s,x,A)ds \qquad (5.3)$$

（$\lambda,\mu>0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$）为 $P(s,t,x,A)$ 的重拉氏变换。（下面将证$R(\lambda,s,x,A)$ 是 s 的有界连续函数，故（5.3）右端积分存在。）

定理5.1 $R(\lambda,s,x,A)$ 具有下列诸性质：

（1）$0\leqslant\lambda R(\lambda,s,x,A)\leqslant 1$；

（2）$\lambda R(\lambda,s,,x,E)\equiv 1\Longleftrightarrow P(s,t,x,A)$ 是不断的（即是 $P(s,t,x,E)\equiv 1$）；

（3）固定 $\lambda>0$，$s\geqslant 0$，$x\in E$，$R(\lambda,s,x,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}$ 上的有限测度；

（4）固定$\lambda>0$，$s\geqslant 0$，$A\in\mathscr{E}$，$R(\lambda,s,\cdot,A)$ 是x 的 $\mathscr{E}$ 可测函数；

（5）固定$\lambda>0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，$R(\lambda,\cdot,x,A)$是s的连续函数，而且这种连续对$A\in\mathscr{E}$是等度的；

（6）$\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\lambda R(\lambda,s,x,A)-I_A(x))=0$对$s\geqslant 0$一致成立。

证：（1）—（4）显然成立。

（5）当 $s<s_0$ 时，

$$|R(\lambda,s,x,A)-R(\lambda,s_0,x,A)|$$

$$\leqslant\int_s^{s_0}e^{-\lambda(t-s)}P(s,t,x,A)dt$$

$$+\left|\int_{s_0}^{\infty}e^{-\lambda(t-s)}P(s,t,x,A)dt-\int_{s_0}^{\infty}e^{-\lambda(t-s_0)}P(s_0,t,x,A)dt\right|$$

$$\leqslant(s_0-s)+\int_{s_0}^{\infty}|e^{-\lambda(t-s)}P(s,t,x,A)-e^{-\lambda(t-s_0)}P(s_0,t,x,A)|dt.$$

而由定理1.2有

$$\lim_{s\to s_0-0}\sup_{A\in\mathscr{E}}|P(s,t,x,A)-P(s_0,t,x,A)|=0,$$

所以，由控制收敛定理有

$$\lim_{s\to s_0-0}\sup_{A\in\mathscr{E}}|R(\lambda,s,x,A)-R(\lambda,s_0,x,A)|=0.$$

当$s>s_0$时，类似地有

$$|R(\lambda,s,x,A)-R(\lambda,s_0,x,A)|$$

$$\leqslant(s-s_0)+\left|\int_s^{\infty}e^{-\lambda(t-s)}P(s,t,x,A)dt-\int_s^{\infty}e^{-\lambda(t-s_0)}\times P(s_0,t,x,A)dt\right|$$

$$\leqslant(s-s_0)+\int_0^{\infty}I_{[s,\infty)}|e^{-\lambda(t-s)}P(s,t,x,A)-e^{-\lambda(t-s_0)}P(s_0,t,x,A)|dt,$$

仿上可证：

$$\lim_{s\to s_0-0}\sup_{A\in\mathscr{E}}|R(\lambda,s,x,A)-R(\lambda,s_0,x,A)|=0.$$

(6) $|\lambda R(\lambda,s,x,A)-I_A(x)|$

$$\leqslant\int_0^{\infty}e^{-u}\left|P\left(s,s+\frac{u}{\lambda},x,A\right)-I_A(x)\right|du,$$

由控制收敛定理即得 (6)。定理证毕。

定理5.2 $Q(\lambda,s,x,A)$ 具有下列性质：

(1) $0\leqslant|\lambda|Q(\lambda,s,x,A)\leqslant|1-e^{-\lambda s}|$；

(2) $\lambda Q(\lambda,s,x,E)\equiv 1-e^{-\lambda s}\Longleftrightarrow P(s,t,x,A)$ 是不断的；

(3) 固定$\lambda\in(-\infty,\infty)$，$s\geqslant 0$，$x\in E$，$Q(\lambda,s,x,\cdot)$ 是$\mathscr{E}$上的有限测度；

(4) 固定$\lambda\in(-\infty,\infty)$，$s\geqslant 0$，$A\in\mathscr{E}$，$Q(\lambda,s,\cdot,A)$ 是x的$\mathscr{E}$可测函数；

(5) 固定$\lambda\in(-\infty,\infty)$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$，$Q(\lambda,\cdot,x,A)$ 是s的右连续函数。

证：证明甚易，留给读者自证。

定理5.3 $\Psi(\lambda,\mu,x,A)$ 具有下述诸性质：

(1) $0\leqslant\Psi(\lambda,\mu,x,A)\leqslant\dfrac{1}{\lambda\mu}$；

(2) $\lambda\mu\Psi(\lambda,\mu,x,E)\equiv 1\Longleftrightarrow\mu R(\mu,s,x,E)\equiv 1\Longleftrightarrow P(s,t,x,A)$ 是不断的；

(3) 固定$\lambda>0$，$\mu>0$，$x\in E$，$\Psi(\lambda,\mu,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度；

(4) 固定$\lambda>0$，$\mu>0$，$A\in\mathscr{E}$，$\Psi(\lambda,\mu,\cdot,A)$ 是x的$\mathscr{E}$可测函数；

(5) $\lim\limits_{\mu\to\infty}(\lambda\mu\Psi(\lambda,\mu,x,A)-I_A(x))=0$对$\lambda>0$一致成立。

证：(1)—(4)显然成立。至于(5)，也只须注意

$$(\lambda\mu\Psi(\lambda,\mu,x,A)-I_A(x))$$

$$=\int_0^\infty e^{-u}(\mu R(\mu,\frac{u}{\lambda},x,A)-I_A(x))du$$

及定理5.1(6) 并应用控制收敛定理即得。

定理5.4 $R(\mu,s,x,A)$、$Q(r,s,x,A)$、$\Psi(\lambda,\mu,x,A)$ 有下列关系：

(1) $$\int_s^\infty dt\int_E P(s,t,x,dy)\,R(\mu,t,y,A)e^{-\lambda(t-s)}\,(\mu-\lambda)$$

$$=R(\lambda,s,x,A)-R(\mu,s,x,A);\qquad(5.4)$$

(2) $\Psi(\nu,\lambda,x,A)-\Psi(\nu,\mu,x,A)$

$$=\int_0^\infty dt\int_E Q(\nu-\lambda,t,x,dy)\,R(\mu,t,y,A)e^{-\lambda t}(\mu-\lambda). \tag{5.5}$$

证：由于$\mu=\lambda$时，(5.4)、(5.5)显然成立．下设$\mu\neq\lambda$。

(1) (5.4) 左边

$$=\int_s^\infty dt\int_t^\infty dr\int_E P(s,t,x,dy)P(t,r,y,A)\,e^{-\lambda(t-s)}e^{-\mu(r-t)}(\mu-\lambda)$$

$$=\int_s^\infty dt\int_t^\infty dr P(s,r,x,A)e^{-\mu(r-s)}e^{(\mu-\lambda)(t-s)}(\mu-\lambda)$$

$$=\int_s^\infty dr\int_s^r dt[e^{(\mu-\lambda)(t-s)}P(s,r,x,A)e^{-\mu(r-s)}(\mu-\lambda)]$$

$$=\int_s^\infty dr[(e^{-\lambda(r-s)}-e^{-\mu(r-s)})P(s,r,x,A)]$$

$$=R(\lambda,s,x,A)-R(\mu,s,x,A).$$

(2) $\Psi(\nu,\lambda,x,A)-\Psi(\nu,\mu,x,A)$

$$=\int_0^\infty ds\int_s^\infty dt\int_E P(s,t,x,dy)\,R(\mu,t,y,A)\,e^{-\lambda(t-s)}e^{-\nu s}(\mu-\lambda)$$

$$=\int_0^\infty dt\int_E Q(\nu-\lambda,t,x,dy)R(\mu,t,y,A)e^{-\lambda t}(\mu-\lambda).$$

定理5.5 设 $P(s,t,x,A)$ 是可微的标准准转移函数，$\tilde{q}(s,x,A)$为其转移密度函数，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda^2R(\lambda,s,x,A)-\lambda I_A(x))=\tilde{q}(s,x,A). \tag{5.6}$$

证：由

$$\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda t}dt=\int_0^\infty\lambda^2te^{-\lambda t}dt=1,\quad(\lambda>0)$$

可得

$$\lambda^2R(\lambda,s,x,A)-\lambda I_A(x)-\tilde{q}(s,x,A)$$

$$=\int_0^\infty\lambda^2e^{-\lambda t}[P(s,s+t,x,A)-I_A(x)-t\tilde{q}(s,x,A)]dt$$

$$=\int_0^\infty ue^{-u}\Big[\frac{\lambda}{u}\Big(P\Big(s,\ s+\frac{u}{\lambda},x,\ A\Big)-I_A(x)\Big)$$

$$-\tilde{q}(s,x,A)\Big]du.$$

由 $\tilde{q}$ 是转移密度函数 可 知： 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使 $\left|\frac{u}{\lambda}\right|\leqslant\delta$时有

$$\left|\frac{\lambda}{u}\Big(P\Big(s,\ s+\frac{u}{\lambda},x,\ A\Big)-I_A(x)\Big)-\tilde{q}(s,x,A)\right|\leqslant\varepsilon.$$

所以

$$|\lambda^2R(\lambda,s,x,A)-\lambda I_A(x)-\tilde{q}(s,x,A)|$$

$$\leqslant\int_0^{\lambda\delta}ue^{-u}\,\varepsilon du+\int_{\lambda\delta}^\infty\lambda e^{-u}\Big(1+\frac{u}{\lambda}\tilde{q}\Big)du,$$

从而

$$\limsup_{\lambda\to\infty}|\lambda^2R(\lambda,s,x,A)-\lambda I_A(x)-\tilde{q}(s,x,A)|\leqslant\varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$可以任意小即得定理5.5.

定义5.2 称标准准转移函数$P(s,t,x,A)$是二重可微的，如果其转移密度函数$\tilde{q}(s,x,A)$ 在$s=0$是可微的，即是

$$\lim_{s\to0+}\frac{1}{s}(\tilde{q}(s,x,A)-\tilde{q}(0,x,A))=\tilde{q}'(x,A),\qquad(5.7)$$

$(x\in E,\ A\in\mathscr{E})$存在且有限.

定理5.6 若$P(s,t,x,A)$ 二重可微，且

$$\lim_{h\to0+}\frac{P(s,s+h,x,A)-I_A(x)}{h}=\tilde{q}(s,x,A)\qquad(5.8)$$

对$s\geqslant0$一致成立，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}(\lambda^2\mu^2\Psi(\lambda,\mu,x,A)-\lambda\mu^2R(\mu,0,x,A))$$

$$=\tilde{q}'(x,A),\ (x\in E,\ A\in\mathscr{E}).\qquad(5.9)$$

证： 令 $M(\lambda,\mu)=\lambda^2\mu^2\Psi(\lambda,\mu,x,A)-\lambda\mu^2R(\mu,0,\ x,\ A)-\tilde{q}'(x,A)$，则

$$M(\lambda,\mu) = -\tilde{q}'(x,A)$$

$$+\int_0^\infty ds\int_0^\infty dt[\lambda^2\mu^2 e^{-(\lambda s+\mu t)}(P(s,s+t,x,A)-P(0,t,x,A))]$$

$$=\int_0^\infty du\int_0^\infty dv\Bigg[uve^{-u-v}$$

$$\cdot\left(\frac{P\left(\frac{u}{\lambda},\ \frac{u}{\lambda}+\frac{v}{\mu},x,A\right)-P\left(0,\frac{v}{\mu},x,A\right)}{\frac{u}{\lambda}\quad\frac{v}{\mu}}-\tilde{q}'(x,A)\right)\Bigg].$$

由(5.8)知：对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon,\lambda,x,A)>0$，当$\left|\frac{v}{\mu}\right|<\delta$时有

$$\left|\left(P\left(\frac{u}{\lambda},\ \frac{u}{\lambda}+\frac{v}{\mu},x,A\right)-P\left(0,\frac{v}{\mu},x,A\right)\right)\Big/\frac{v}{\mu}\right.$$

$$\left.-\left(\tilde{q}\left(\frac{u}{\lambda},x,A\right)-\tilde{q}(0,x,A)\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\left(P\left(\frac{u}{\lambda},\ \frac{u}{\lambda}+\frac{v}{\mu},x,A\right)-I_A(x)\right)\Big/\frac{v}{\mu}\right.$$

$$\left.-\tilde{q}\left(\frac{u}{\lambda},x,A\right)\right|$$

$$+\left|\left(P\left(0,\frac{v}{\mu},x,A\right)-I_A(x)\right)\Big/\frac{v}{\mu}-\tilde{q}(0,x,A)\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda}. \qquad (5.10)$$

由(5.8) 还有：

$$\sup_{S\geqslant 0}|\tilde{q}(s,x,A)|\leqslant L(x,A)<\infty, \qquad (5.11)$$

但是，若令

$$M_1(\lambda,\mu)=\int_0^\infty du\int_0^\infty dv\Big[uve^{-u-v}\Big\{\Big(P\Big(\frac{u}{\lambda},\ \frac{u}{\lambda}+\frac{v}{\mu},x,A\Big)$$

$$-P\left(0,\frac{v}{\mu},x,A\right)\Big)\Big/\frac{uv}{\lambda\mu}$$

$$-\Big(\tilde{q}\Big(\frac{u}{\lambda},x,A\Big)-\tilde{q}(0,x,A)\Big)\Big/\frac{u}{\lambda}\Big\}\Big],$$

$$M_2(\lambda)=\int_0^\infty du\int_0^\infty dv\Big[uve^{-u-v}\Big\{\Big(\tilde{q}\Big(\frac{u}{\lambda},x,A\Big)$$

$$-\tilde{q}(0,x,A)\Big)\Big/\frac{u}{\lambda}-\tilde{q}'(x,A)\Big\}\Big],$$

则

$$|M(\lambda,\mu)|\leqslant|M_1(\lambda,\mu)|+|M_2(\lambda)|. \tag{5.12}$$

而由(5.10)、(5.11) 有

$$|M_1(\lambda,\mu)|\leqslant\int_0^\infty du\int_0^{\mu\delta}dv\Big[uve^{-u-v}\frac{\varepsilon}{\lambda}\Big/\frac{u}{\lambda}\Big]$$

$$+\int_0^\infty du\int_{\mu\delta}^\infty dv\Big[uve^{-u-v}\Big(\frac{2}{\frac{uv}{\lambda\mu}}+\frac{2L(x,A)}{\frac{u}{\lambda}}\Big)\Big]$$

$$\leqslant\varepsilon+\int_{\mu\delta}^\infty e^{-v}(2\lambda\mu+2\lambda vL(x,A))dv,$$

由$\varepsilon>0$可任意小，由上式即得：

$$\lim_{\mu\to\infty}|M_1(\lambda,\mu)|=0. \tag{5.13}$$

由(5.12)、(5.13)，为证定理，只须证

$$\lim_{\lambda\to\infty}M_2(\lambda)=0. \tag{5.14}$$

事实上，由 $P(s,t,x,A)$ 二重可微得知：任给 $\varepsilon_1>0$，存在 $h=h(\varepsilon_1,x,A)>0$，当$\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|\leqslant h$时，

$$\left|\Big(\tilde{q}\Big(\frac{\mu}{\lambda},x,A\Big)-\tilde{q}(0,x,A)\Big)\Big/\frac{\mu}{\lambda}-\tilde{q}'(x,A)\right|\leqslant\varepsilon_1.$$

$$(5.15)$$

由(5.11)、(5.15)及$M_2(\lambda)$之定义有

$$|M_2(\lambda)| \leqslant \int_0^{\lambda h} ue^{-u}\varepsilon_1 du + \int_{\lambda h}^{\infty} ue^{-u}\left(\frac{2L(x,A)}{\frac{u}{\lambda}} + |\tilde{q}'(x,A)|\right)du$$

$$\leqslant \varepsilon_1 + 2\lambda L(x,A)e^{-\lambda h} + |\tilde{q}'(x,A)|\int_{\lambda h}^{\infty} ue^{-u} du,$$

由$\varepsilon_1>0$可任意小，在上式中令$\lambda\to\infty$即得(5.14)。定理证毕。

定理5.7 若$P(s,t,x,A)$ 可微，且满足：

(1) $\lim\limits_{(t-S)\to 0+} \sup\limits_{x\in E}(1-P(s,t,x,\{x\}))=0,$ (5.16)

(2) $\sup\limits_{x\in E}|\bar{q}(x)|\leqslant C<\infty$，($\bar{q}(x)$之定义见定理3.5)，(5.17)

则

(1) $$\int_s^{\infty}\left[e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}P(s,t,x,A)\right]dt = \lambda R(\lambda,s,x,A) - I_A(x),$$

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(2) $$\frac{d}{ds}R(\lambda,s,x,A) = -\int_0^{\infty}dt\int_E\tilde{q}(s,x,dy)P(s,s+t,y,A)e^{-\lambda t} + \int_0^{\infty}dt\int_E P(s,s+t,x,dy)\tilde{q}(s+t,y,A)e^{-\lambda t},$$

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(3) $$\int_0^t\left[e^{-\lambda s}\frac{\partial}{\partial s}P(s,t,x,A)\right]ds = \lambda Q(\lambda,t,x,A) - P(0,t,x,A) + I_A(x)e^{-\lambda t},$$

$(\lambda\in(-\infty,\infty),\ t\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$；

(4) $$\frac{d}{ds}Q(\lambda,s,x,A) = \int_0^s du\int_E P(u,s,x,dy)\tilde{q}(s,y,A)e^{-\lambda u}$$

$$+e^{-\lambda s}I_A(x)$$

$$=\int_E Q(\lambda,s,x,dy)\tilde{q}(s,y,A)+e^{-\lambda s}I_A(x),$$

$(\lambda\in(-\infty,\infty),\ s\geqslant 0,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$。

证：(1) 由定理4.3及条件(5.17)得：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t,x,A)=\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A)$$

是t的有界可测函数。故(1)之左端的积分存在。再利用分部积分法即可得(1)。

(2) 由定理4.1和4.3有：

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t,x,A)=-\int_E\tilde{q}(s,x,dy)P(s,t,y,A),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t,x,A)=\int_E P(s,t,x,dy)\tilde{q}(t,y,A).$$

所以

$$\frac{d}{ds}P(s,s+t,x,A)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}P(u,v,x,A)+\frac{\partial}{\partial v}P(u,v,x,A)\right)_{u=s,v=s+t}$$

$$=-\int_E\tilde{q}(s,x,dy)P(s,s+t,y,A)$$

$$+\int_E P(s,s+t,x,dy)\tilde{q}(s+t,y,A).$$

因此，由条件(5.17)得知$\frac{d}{ds}P(s,s+t,x,A)$是t的有界可测函数所以由[21]P.126(3°)可知：

$$\frac{d}{ds}R(\lambda,s,x,A)=\int_0^\infty\left[e^{-\lambda t}\frac{d}{ds}P(s,s+t,x,A)\right]dt$$

$$=-\int_0^\infty dt\int_E\tilde{q}(s,x,dy)P(s,s+t,y,A)e^{-\lambda t}$$

$$+\int_0^{\infty}dt\int_E P(s,s+t,x,dy)\tilde{q}(s+t,y,A)e^{-\lambda t}.$$

(3) 仿(1) 可证(3)。

(4) $$\frac{d}{ds}Q(\lambda,s,x,A)=\frac{d}{ds}\int_0^t e^{-\lambda u}P(u,s,x,A)du$$

$$=e^{-\lambda t}P(s,s,x,A)+\int_0^t\left(e^{-\lambda u}\frac{\partial}{\partial s}P(u,s,x,A)\right)du$$

$$=e^{-\lambda t}I_A(x)+\int_E Q(\lambda,s,x,dy)\tilde{q}(s,y,A).$$

§6 非时齐的q过程的存在性

由定义4.1可知：可微的标准准转移函数$P(s,t,x,A)$的转移密度函数必为q函数。§4已研究了在何种条件下标准准转移函数是可微的，即有转移密度函数。而本节及下一节，将要研究§4中的逆问题，即是：给定一个q函数$\tilde{q}(t,x,A)$，是否恒存在标准准转移函数，其转移密度函数就是$\tilde{q}(t,x,A)$，如果存在，什么情况下唯一？

定义6.1 设$\tilde{q}(t,x,A)$是任一q函数，称标准准转移函数$P(s,t,x,A)$是一个q过程，如果$P(s,t,x,A)$是可微的，且其转移密度函数就是$\tilde{q}(t,x,A)$。

定理6.1 设$\tilde{q}(t,x,A)$是一个q函数，若对任何$x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $\tilde{q}(\cdot,x,A)$是t的连续函数，则q过程恒存在。

证： 令

$$q(t,x,A)=\tilde{q}(t,x,A-\{x\}),\quad q(t,x)=-\tilde{q}(t,x,\{x\}),$$

$$P_0(s,s+t,x,A)=I_A(x)e^{-\int_s^{s+t}q(u,x)du}$$

$$P_{n+1}(s,s+t,x,A)=$$

$$\doteq \int_0^t du \int_E q(s+u,x,dy) e^{-\int_s^{s+u} q(v,x)dv} P_n(s+u,s+t,y,A)$$

$$= \int_s^{s+t} du \int_E q(u,x,dy) e^{-\int_s^u q(v,x)dv} P_n(u,s+t,y,A), \tag{6.1}$$

$(n \geqslant 0,\ 0 \leqslant s,\ t < \infty,\ x \in E,\ A \in \mathscr{E})$,

$$\bar{P}(s,s+t,x,A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s,s+t,x,A), \tag{6.2}$$

可证$\bar{P}(s,s+t,x,A)$就是一个q过程。

(1) 显然，固定s,t,A，$P_0(s,t,\cdot,A)$是x的$\mathscr{E}$可测函数，$0 \leqslant P_0(s,t,x,A) \leqslant 1$；固定$s,t,x$，$P_0(s,t,x,\cdot)$是$\mathscr{E}$上的有限测度；固定$t,x,A$，$P_0(\cdot,t,x,A)$是$s$的连续函数（在$s \in [0,t]$上）；固定$s,x,A$，$P_0(s,\cdot,x,A)$是$t$的连续函数（在$t \in [s,\infty)$上）。由第一编引理7.3，对$n$作归纳法可证：对任何$n \geqslant 0$，定义$P_n(s,t,x,A)$的积分有意义，而且$P_n(s,t,x,A)$亦具有$P_0(s,t,x,A)$所具备的前述四条性质。

(2) 可证对一切$n \geqslant 0$，$0 \leqslant s$，$t < \infty$，$x \in E$，有

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} P_k(s,s+t,x,E) \leqslant 1. \tag{6.3}$$

对n作归纳法．显然，当$n=0$时，(6.3)成立．设$n=m$时(6.3)成立，往证$n=m+1$时(6.3)亦成立。事实上，

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{m+1} P_k(s,s+t,x,E)$$

$$\leqslant e^{-\int_s^{s+t} q(u,x)du} + \int_0^t du \int_E q(s+u,x,dy) e^{-\int_s^{s+u} q(v,x)dv}$$

$$\leqslant e^{-\int_s^{s+t} q(u,x)du} + \int_0^t q(s+u,x) e^{-\int_s^{s+u} q(v,x)dv} du = 1,$$

归纳法完成。

由(2) 即得:

$$0\leqslant \overline{P}(s,s+t,x,E)\leqslant 1,\quad (s\geqslant 0,t\geqslant 0,x\in E).$$

(3) 由(1) 得知: 固定s,t,A,$\overline{P}(s,s+t,\cdot,A)$ 是x的$\mathscr{E}$可测函数。

(4) 显然,固定s,t,x,$P_n(s,s+t,x,\cdot)$ 是$\mathscr{E}$上的有限测度($n\geqslant 0$), 故$\overline{P}(s,s+t,x,\cdot)$ 是$\mathscr{E}$上的实值的具有有限可加性的集合函数. 利用控制收敛定理还可证明:

$$\text{“}A_n\supset A_{n+1},\ A_n\in\mathscr{E},\ \bigcap_n A_n=\varnothing$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\overline{P}(s,s+t,x,A_n)=0\text{”},$$

所以$\overline{P}(s,s+t,x,\cdot)$ 是$\mathscr{E}$上的有限测度。

(5) $\overline{P}(s,s+t,x,A)$ 满足$(K-C)$ 方程式。

首先, 对n作归纳法证明: 对$n\geqslant 0$有

$$P_n(s,s+t+u,x,A)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\int_E p_r(s,s+t,x,dy)P_{n-r}(s+t,s+t+u,y,A). \tag{6.4}$$

事实上, $n=0$时(6.4) 式显然成立。设$n=k$时(6.4) 式成立。由(6.1) 有

$$P_{k+1}(s,s+t+u,x,A)$$

$$=\int_0^t dw\int_E q(s+w,x,dy)\, e^{-\int_s^{s+w}q(v,x)\,dv}$$

$$\cdot P_k(s+w,s+t+u,y,A)$$

$$+\int_t^{t+u} dw\int_E q(s+W,x,dy)\, e^{-\int_s^{s+w}q(v,x)\,dv}$$

$$\cdot P_k(s+W,s+t+u,y,A).$$

由归纳法假设及(6.1) 得知：上式右端第一项等于

$$\sum_{\nu=0}^{k}\int_0^t dw\int_E q(s+w,x,dy)\,e^{-\int_s^{s+w}q(v,x)\,dv}$$

$$\cdot\int_E P_\nu(s+w,s+t,y,dz)\cdot p_{k-\nu}(s+t,\ s+t+u,\ z,\ A)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}\int_E P_{\nu+1}(s,s+t,\ x,\ dz)p_{k-\nu}(s+t,s+t+u,z,A).$$

而由 (6.1)直接计算上式右端第二项等于

$$e^{-\int_s^{s+t}q(v,\ x)dv}\int_0^u dw\int_E q(s+t+w,\ x,\ dy)$$

$$\cdot e^{-\int_{s+t}^{s+t+w}q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot p_k(s+t+w,\ s+t+u,\ y,\ A)$$

$$=\int_E P_0(s,\ s+t,\ x,\ dy)p_{k+1}(s+t,\ s+t+u,y,\ A).$$

总上三式，发现$n=k+1$时(6.4) 亦成立。归纳法完成。

用(6.4) 得

$$\bar{P}(s,\ s+t+u,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(s,\ s+t+u,\ x,\ A)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{\nu=0}^{n}\int_E P_\nu(s,\ s+t,\ x,\ dy)p_{n-\nu}(s+t,s+t+u,y,A)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_E P_\nu(s,\ s+t,\ x,\ dy)\bar{P}(s+t,\ s+t+u,\ y,\ A).$$

但是

$$\left|\sum_{\nu=0}^{N}\int_E P_\nu(s,\ s+t,\ x,\ dy)\bar{P}(s+t,s+t+u,\ y,\ A)\right.$$

$$-\int_E \overline{P}(s,\ s+t,\ x,\ dy)\overline{P}(s+t,\ s+t+u,\ y,A)\Big|$$

$$\leqslant \overline{P}(s,\ s+t,\ x,\ E)-\sum_{\nu=0}^{N} P_\nu(s,\ s+t,\ x,\ E),$$

令$N\to\infty$即发现$\overline{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)$满足$(K-C)$方程式.

(6) 由$P_n(s,\ s+t,\ x,\ A)$和$\overline{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)$的定义，以(6.1) 代入(6.2) 得:

$$\overline{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)=I_A(x)e^{-\int_s^{s+t} q(v,\ x)dv}$$

$$+\int_0^t du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot \overline{P}(s+u,\ s+t,\ y,\ A).\tag{6.5}$$

而$q(v,\ x)$、$q(v,\ x,\ A)$都是v的连续函数，所以由(6.5)得:

$$\lim_{\substack{(t-s)\to 0+\\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b}} |\overline{P}(s,\ t,\ x,\ A)-I_A(x)|=0,\ \ (b>0).$$

显然$\overline{P}(s,\ s,\ x,\ A)=I_A(x)$.

总(1)—(6)，我们证明了$\overline{P}(s,\ t,\ x,\ A)$确是一个标准的准转移函数.

下面我们证明$\overline{P}(s,\ t,\ x,\ A)$是一个$q$过程. 事实上，由(6.5) 有

$$\frac{1}{h}(\overline{P}(s,\ s+h,\ x,\ A)-I_A(x))-\tilde{q}(s,\ x,\ A)$$

$$=I_A(x)\frac{1}{h}(e^{-\int_s^{s+h} q(v,\ x)dv}-1)$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^h du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot \overline{P}(s+u,\ s+h,\ y,\ A)-\tilde{q}(s,\ x,\ A).\tag{6.6}$$

由$q(v, x)$是v的连续函数及$|I_A(x)|\leqslant 1$得

$$\lim_{h\to 0+} I_A(x)\frac{1}{h}\left(e^{-\int_s^{s+h} q(v,x)dv}-1\right)$$

$$=-I_A(x)q(s,x), \tag{6.7}$$

对$A\in\mathscr{E}$ 一致成立。若注意

$$q(s,x,A)=\tilde{q}(s,x,A)+I_A(x)q(s,x),$$

$\tilde{q}(s,x,A)$是s的连续函数，则由定理1.2、第一编引理7.3及中值定理有

$$\frac{1}{h}\int_0^h du\int_E q(s+u,x,dy)e^{-\int_s^{s+u} q(v,x)dv}$$

$$\cdot\bar{P}(s+u,s+h,y,A)-\tilde{q}(s,x,A)-I_A(x)q(s,x)$$

$$=\int_E q(s+\theta,x,dy)e^{-\int_s^{s+\theta} q(v,x)dv}\bar{P}(s+\theta,s+h,y,A)$$

$$-q(s,x,A)$$

$$=\int_E (q(s+\theta,x,dy)-q(s,x,dy))e^{-\int_s^{s+\theta} q(v,x)dv}$$

$$\cdot\bar{P}(s+\theta,s+h,y,A)+\int_E q(s,x,dy)\left(e^{-\int_s^{s+\theta} q(v,x)dv}\right.$$

$$\left.\cdot\bar{P}(s+\theta,s+h,y,A)-I_A(y)\right),$$

$$(0\leqslant\theta\leqslant h). \tag{6.8}$$

若注意$\bar{P}(s,t,x,A)$是标准准转移函数及

$$|\bar{P}(s,t,x,A)-I_A(x)|\leqslant 1-\bar{P}(s,t,x,\{x\}), \tag{6.9}$$

再利用控制收敛定理可知：当$h\to 0+$时，(6.8) 右端第二项对$A\in\mathscr{E}$ 一致地趋于0。

由$q(s,x,A)$是s的连续函数，并应用 (6.9) 及第一编引理

7.3 有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_E q(s+\theta,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+\theta}q(v,\ x)dv}\overline{P}(s+\theta,\ s+h,\ y,A)$$

$$=q(s,\ x,\ A), \tag{6.10}$$

对$A\in\mathscr{E}$一致地成立．由(6.9) 及控制收敛定理有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_E q(s,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+\theta}q(v,\ x)dv}\overline{P}(s+\theta,\ s+h,y,\ A)$$

$$=q(s,\ x,\ A), \tag{6.11}$$

对$A\in\mathscr{E}$一致地成立．总之，由(6.10)、(6.11)知(6.8)右端第一项当$h\to 0^+$时它对$A\in\mathscr{E}$一致地趋于0。

这就证明了：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h du\int^E q(s+u,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot\overline{P}(s+u,\ s+h,\ y,\ A)$$

$$=\tilde{q}(s,\ x,\ A)+I_A(x)q(s,\ x),\ (\text{对}A\in\mathscr{E}\text{一致成立})。 \tag{6.12}$$

由(6.6)、(6.7)、(6.12)得：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(\overline{P}(s,\ s+h,\ x,\ A)-I_A(x))$$

$$=\tilde{q}(s,\ x,\ A), \tag{6.13}$$

对$A\in\mathscr{E}$一致成立。

类似地，当$s>0$，由(6.5)有

$$\frac{1}{h}(\overline{P}(s-h,\ s,\ x,\ A)-I_A(x))-\tilde{q}(s,\ x,\ A)$$

$$=\frac{1}{h}(e^{-\int_{s-h}^{s}q(v,\ x)dv}-1)I_A(x)-\tilde{q}(s,\ x,\ A)$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^h du\int_E q(s-h+u,\ x,\ dy)e^{-\int_{s-h}^{s-h+u} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot\overline{P}(s-h+u,\ s,\ y,\ A). \tag{6.14}$$

而

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(e^{-\int_{s-h}^{s} q(v,\ x)dv}-1)I_A(x)$$

$$=-I_A(x)q(s,\ x), \tag{6.15}$$

对$A\in\mathscr{E}$一致成立。

$$\frac{1}{h}\int_0^h du\int_E q(s-h+u,x,\ dy)\,e^{-\int_{s-h}^{s-h+u} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot\overline{P}(s-h+u,s,\ y,\ A)-\tilde{q}(s,\ x,\ A)-I_A(x)q(s,\ x)$$

$$=\int_E(q(s-\theta,\ x,\ dy)-q(s,\ x,\ dy))(e^{-\int_{s-h}^{s-\theta} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot\overline{P}(s-\theta,s,\ y,\ A)+\int_E q(s,x,\ dy)(e^{-\int_{s-h}^{s-\theta} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot\overline{P}(s-\theta,s,\ y,\ A)-I_y(A)). \tag{6.16}$$

仿前可证：

$$\lim_{h\to 0+}\Big[\frac{1}{h}\int_0^h du\int_E q(s-h+u,\ x,\ dy)e^{-\int_{s-h}^{s-h+u} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot\overline{P}(s-h+u,s,\ y,\ A)-\tilde{q}(s,x,A)-I_A(x)q(s,\ x)\Big]$$

$$=0,\quad (\text{对}A\in\mathscr{E}\text{一致成立}). \tag{6.17}$$

由(6.14)－(6.17)得：

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\overline{P}(s-h,\ s,\ x,\ A)-I_A(x)}{h}=\tilde{q}(s,\ x,\ A), \tag{6.18}$$

对$A\in\mathscr{E}$一致成立。

这就证明了$\bar{P}(s,\ t,\ x,\ A)$是一个q过程，而且(6.13)和(6.18)中的收敛对$A\in\mathscr{E}$还是一致的。定理证毕。

定理6.2 设$\bar{q}(s,\ x,\ A)$是一个q函数，且$\bar{q}(\cdot,\ x,\ A)$(对一切$x\in E,\ A\in\mathscr{E}$)是s的连续函数，则对任何q过程$P(s,\ t,\ x,\ A)$来说，均满足：

(1) $$\frac{\partial}{\partial s}P(s,\ t,\ x,\ A)=-\int_E\bar{q}(s,\ x,\ dy)P(s,t,y,\ A).\tag{B}$$

而且$\frac{\partial}{\partial s}P(s,\ t,\ x,A)$作为$s$的函数在$[0,\ t]$上连续，作为$t$的函数，在$[s,\ \infty)$上右连续，这两种连续对$A\in\mathscr{E}$来说都是等度的。

(2) $$P(s,\ s+t,\ x,\ A)=I_A(x)e^{-\int_s^{s+t}q(v,\ x)dv}+\int_0^t du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}\cdot P(s+u,\ s+t,\ y,\ A).\tag{B$'$}$$

证： (1) 由定理4.1即得(B)。由定理1.2知$P(s,\ t,\ x,\ A)$是s的连续函数(且对$A\in\mathscr{E}$是等度的)，而$\bar{q}(s,\ x,\ A)$也是s的连续函数，所以由第一编引理7.3得知(B)的右端是s的连续函数，而且这种连续对$A\in\mathscr{E}$是等度的。由定理1.2还知$P(s,\ t,\ x,\ A)$对t来说右连续，而且对$A\in\mathscr{E}$来说是等度的，利用控制收敛定理可知(B)的右端对t来说右连续，而且这种连续对$A\in\mathscr{E}$来说是等度的。(1)证毕。

(2) 由(B)并应用分部积分法可得：

$$\int_0^t du\int_E q(s+u,x,dy)P(s+u,s+t,y,\ A)e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}$$

$$=\int_0^t du\Big[\Big(-\frac{\partial}{\partial u}p(s+u,\ s+t,\ x,\ A)+q(s+u,\ x)\cdot p(s+u,\ s+t,\ x,\ A)\Big)\cdot e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}\Big]$$

$$=(-p(s+t,\ s+t,\ x,\ A)\,e^{-\int_s^{s+t}q(v,\ x)dv}+p(s,\ s+t,\ x,\ A)e^{-\int_s^{s}q(v,\ x)dv})$$

$$+\int_0^t\Big(\frac{\partial}{\partial u}e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}\Big)p(s+u,\ s+t,\ x,\ A)du$$

$$+\int_0^t q(s+u,\ x)p(s+u,\ s+t,\ x,\ A)e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}du$$

$$=-I_A(x)e^{-\int_s^{s+t}q(v,\ x)dv}+p(s,\ s+t,\ x,\ A).$$

此即$(B)'$。定理证毕。

定理6.3 设q函数$\bar{q}(s,\ x,\ A)$对s连续，则定理6.1中所构造的q过程$\bar{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)$是最小的q过程，即对任何q过程$p(s,\ s+t,\ x,\ A)$，恒有$p(s,\ s+t,\ x,\ A)\geqslant\bar{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)$。

证： 设$P_n(s,\ s+t,\ x,\ A)$ $(n\geqslant 0)$、$\bar{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)$如定理6.1所定义。若$p(s,\ s+t,\ x,\ A)$是q过程，则由定理6.2得知它满足：

$$(B)':\ p(s,\ s+t,\ x,\ A)=I_A(x)e^{-\int_s^{s+t}q(v,\ x)dv}+\int_0^t du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}\cdot p(s+u,\ s+t,\ y,\ A).$$

由于$(B)'$右端第二项非负，所以

$$P(s,\ s+t,\ x,\ A) \geqslant I_A(x) e^{-\int_s^{s+t} q(v,\ x)dv}$$
$$= P_0(s,\ s+t,\ x,\ A).$$

设

$$P(s,\ s+t,\ x,\ A) \geqslant \sum_{k=0}^{n} P_k(s,\ s+t,\ x,\ A),$$

则由$(B)'$及(6.1)得:

$$P(s,\ s+t,\ x,\ A) \geqslant I_A(x) e^{-\int_s^{s+t} q(v,\ x)dv}$$
$$+\int_0^t du \int_E q(s+u,\ x,\ dy) e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv}$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{n} P_k(s+u,\ s+t,\ y,\ A)$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} P_k(s,\ s+t,\ x,\ A).$$

所以

$$P(s,\ s+t,\ x,\ A) \geqslant \sum_{k=0}^{m} P_k(s,\ s+t,\ x,\ A),$$

(一切$m \geqslant 0$),

从而

$$P(s,\ s+t,\ x,\ A) \geqslant \bar{P}(s,\ s+t,\ x,\ A).$$

定理证毕。

§7 q过程的唯一性

本节沿用§6的符号。设$\bar{q}(s,\ x,\ A)$、$P_n(s,\ s+t,\ x,\ A)$、$\bar{P}(s,\ s+t,\ x,\ A)$如定理6.1所规定。令

$$R_n(\lambda, s, x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_n(s, s+t, x, A)dt, \binom{n \geqslant 0}{\lambda > 0}, \tag{7.1}$$

$$\bar{R}(\lambda, s, x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda, s, x, A)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{P}(s, s+t, x, A)dt, \quad (\lambda > 0). \tag{7.2}$$

引理7.1 对$R_n(\lambda, s, x, A)$、$\bar{R}(\lambda, s, x, A)$，恒有

$$R_{n+1}(\lambda, s, x, A)$$

$$= \int_0^\infty du \int_E q(s+u, x, dy)\Big[e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}$$

$$\cdot R_n(\lambda, s+u, y, A)\Big], \qquad (n \geqslant 0), \tag{7.3}$$

$$\bar{R}(\lambda, s, x, A) = R_0(\lambda, s, x, A)$$

$$+ \int_0^\infty du \int_E q(s+u, x, dy)(e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}$$

$$\cdot \bar{R}(\lambda, s+u, x, A)). \tag{7.4}$$

证:

$$R_{n+1}(\lambda, s, x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{n+1}(s, s+t, x, A)dt$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^t du \int_E q(s+u, x, dy)[P_n(s+u, s+t, y, A)$$

$$\cdot e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv} e^{-\lambda t}]$$

$$= \int_0^\infty du \int_E q(s+u, x, dy) \int_u^\infty dt [e^{-\lambda t} P_n(s+u, s+t, y, A)$$

$$\cdot e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}]$$

$$=\int_0^{\infty}du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot R_n(\lambda,\ s+u,\ y,\ A). \tag{7.5}$$

引理7.2 任何q过程$P(s,\ s+t,\ x,\ A)$的右拉氏变换$R(\lambda,\ s,\ x,\ A)$恒满足：

$$(B_\lambda):\ R(\lambda,\ s,\ x,\ A)=R_0(\lambda,\ s,\ x,\ A)$$

$$+\int_0^{\infty}du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)\Big[e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot R(\lambda,\ s+u,\ y,\ A)\Big].$$

证：由于$P(s,\ s+t,\ x,\ A)$满足$(B)'$，对$(B)'$两边取拉氏变换即得：

$$R(\lambda,\ s,\ x,\ A)=R_0(\lambda,\ s,\ x,\ A)$$

$$+\int_0^{\infty}dt\int_0^t du\int_E q(s+u,\ x,\ dy)\Big[e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot P(s+u,\ s+t,\ y,\ A)e^{-\lambda t}\Big].$$

与（7.5）的推导类似可得(B_λ)。

定理7.1 设$\tilde{q}(s,\ x,\ A)$是保守的q函数，即$\tilde{q}(s,\ x,\ E)\equiv 0$，$\tilde{q}(s,\ x,\ A)$对$s$来说连续，令

$$\bar{y}(\lambda,\ s,\ x)=1-\lambda\bar{R}(\lambda,s,x,E),$$

$$\mathscr{H}=\{z(\cdot):\ z\text{是}E\text{上的}\mathscr{E}\text{可测函数，且}0\leqslant z\leqslant 1\},$$

则$\bar{y}(\lambda,\ s,\ \cdot)$是

$$\begin{cases} z(\lambda,\ s,\ \cdot)=\int_0^{\infty}du\int_E q(s+u,\ \cdot,\ dy)\Big[e^{-\lambda u} \\ \cdot e^{-\int_s^{s+u}q(v,\ \cdot)dv}\qquad z(\lambda,\ s+u,\ y)\Big], \qquad (U_{\lambda,s}) \\ z(\lambda,s,\cdot)\in\mathscr{H}, \end{cases}$$

的最大解。

证：显然，$\bar{y}(\lambda, s, \cdot)\in\mathscr{H}$，由引理7.1及$R_0(\lambda, s, x, A)$的定义有

$$\bar{y}(\lambda, s, x)=1-\lambda R_0(\lambda, s, x, E)$$

$$-\int_0^\infty du\int_E q(s+u, x, dy)\Big[e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}$$

$$\lambda\bar{R}(\lambda, s+u, y, E)\Big]$$

$$=\Big(1-\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}du\Big)$$

$$-\int_0^\infty du\int_E q(s+u,x,dy)\Big[e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}$$

$$\lambda\bar{R}(\lambda, s+u, y, E)\Big]. \tag{7.6}$$

由于$\tilde{q}(s, x, A)$保守，所以$q(s, x, E)\equiv q(s, x)$，再用分部积分法可得：

$$1-\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}du$$

$$=\int_0^\infty\Big(e^{-\int_s^{s+u}(qv, x)dv}-1\Big)de^{-\lambda u}$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda u}q(s+u, x)e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}du$$

$$=\int_0^\infty du\int_E q(s+u, x, dy)e^{-\lambda u}e^{-\int_s^{s+u} q(v, x)dv}. \tag{7.7}$$

以（7.7）代入（7.6）发现$\bar{y}(\lambda, s, \cdot)$满足$(U_{\lambda,s})$。

再证 $\bar{y}(\lambda,\ s,\ \cdot)$ 的最大性. 事实上，若有 $y(\lambda,\ s,\cdot)$ 也是 $(U_{\lambda,s})$ 的解，则由 (7.7) 有

$$y(\lambda,\ s,\ x)=\left(1-\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv} du\right)$$

$$+\int_0^\infty du\int_E q(s+u,\ x,\ dx^*)\Big[e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv}$$

$$(y(\lambda,\ s+u,\ x^*)-1)\Big]$$

$$\leqslant\left(1-\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv} du\right)$$

$$=1-\lambda R_0(\lambda,\ s,x,E).$$

设

$$y(\lambda,\ s,\ x)\leqslant 1-\lambda\sum_{k=0}^{n} R_k(\lambda,\ s,\ x,\ E),$$

可证：

$$y(\lambda,\ s,\ x)\leqslant 1-\lambda\sum_{k=0}^{n+1} R_k(\lambda,\ s,\ x,\ E).$$

事实上，由归纳法假设及 (7.3) 有：

$$y(\lambda,\ s,\ x)=1-\lambda R_0(\lambda,\ s,\ x,\ E)$$

$$+\int_0^\infty du\int_E q(s+u,\ x,\ dx^*)\Big[e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv}$$

$$(y(\lambda,\ s+u,\ x^*)-1)\Big]$$

$$\leqslant 1-\lambda R_0(\lambda,\ s,\ x,\ E)$$

$$-\int_0^\infty du\int_E q(s+u,\ x,\ dx^*)\Big[e^{-\lambda u} e^{-\int_s^{s+u} q(v,\ x)dv}$$

$$\cdot \lambda \sum_{k=0}^{n} R_k(\lambda, s+u, x^*, E) \Big]$$

$$= 1 - \lambda \sum_{k=0}^{n+1} R_k(\lambda, s, x, E),$$

归纳法完成，从而

$$y(\lambda, s, x) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\lambda, s, x, E) = \bar{y}(\lambda, s, x).$$

定理7.2 设$\tilde{q}(s, x, A)$满足定理7.1的条件，则恰有唯一一个q过程且不断的充要条件是：$(U_{\lambda,s})$只有零解（对一切$\lambda>0$, $s\geqslant 0$）。

证：由定理5.1及定理7.1立即可得此定理。

§8 双参数算子半群

在第一、第二编中，我们曾经有，由时齐的准转移函数$P(t, x, A)$可以产生（单参数）算子半群，反过来算子半群理论用于时齐的准转移函数，又可得到许多新结果。对于非时齐的准转移函数$P(s, t, x, A)$，我们试图引进“双参数算子半群”。遗憾的是，无论是非时齐的准转移函数，或双参数算子半群，其结果远比时齐的准转移函数和（单参数）算子半群粗糙。然而，我们还是试图对这方面的理论进行探索。

定义8.1 设$\boldsymbol{B}$是一Banach空间，f、g,…表其中的元素。称由$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{B}$的有界线性算子族$\{F_{s,t}, 0\leqslant s\leqslant t<\infty\}$是一个双参数算子半群（简称半群），如果$F_{s,r}=F_{s,t}\circ F_{t,r}$, $F_{s,s}=I$,（$0\leqslant s\leqslant t\leqslant r<\infty$, I是恒等算子，$F_{s,t}\circ F_{t,r}$表复合算子）。特别地，若还有$\|F_{s,t}\|\leqslant 1$,（$0\leqslant s\leqslant t<\infty$）则称$\{F_{s,t}\}$是压缩型的。算子范数如通常定义：

$$\|F_{s,t}\| = \sup_{\substack{f\in B\\ \|f\|=1}} \|F_{s,t}f\|.$$

$\boldsymbol{B}$中的依范数收敛称为强收敛，强收敛、强连续、强导数、强积分（即 Bochner 积分）的定义及符号均沿袭第一编§2.

令

$$\boldsymbol{B}_0^+(t) = \{f: f\in \boldsymbol{B},\ (s)\lim_{u\to t+0} F_{t,u}f = f\},\ (t\geqslant 0)$$

$$\boldsymbol{B}_0^-(t) = \{f: f\in \boldsymbol{B},\ (s)\lim_{u\to t-0} F_{u,t}f = f\},\ (t>0)$$

$$\boldsymbol{B}_0^+ = \bigcap_{t\geqslant 0} \boldsymbol{B}_0^+(t),$$

$$\boldsymbol{B}_0^- = \bigcap_{t>0} \boldsymbol{B}_0^-(t),$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}_0^- \cap \boldsymbol{B}_0^+.$$

定理8.1 若$\{F_{s,t}\}$是压缩型半群，则$\boldsymbol{B}_0^+(t)$、$\boldsymbol{B}_0^-(t)$是$\boldsymbol{B}$的闭线性子空间，从而$\boldsymbol{B}_0^+$、$\boldsymbol{B}_0^-$、$\boldsymbol{B}_0$亦然.

证： 显然$\boldsymbol{B}_0^+(t)$是$\boldsymbol{B}$的线性子空间. 再任取$f_n\in \boldsymbol{B}_0^+(t)$，$(s)\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，则

$$\begin{aligned}
&\|F_{t,u}f - f\|\\
&\leqslant \|F_{t,u}f - F_{t,u}f_n\| + \|F_{t,u}f_n - f_n\| + \|f_n - f\|\\
&\leqslant 2\|f_n - f\| + \|F_{t,u}f_n - f_n\|,
\end{aligned}$$

先令$u\to t+0$，次令$n\to\infty$即发现$f\in \boldsymbol{B}_0^+(t)$，故$\boldsymbol{B}_0^+(t)$闭. 仿之可证$\boldsymbol{B}_0^-(t)$亦为$\boldsymbol{B}$的闭线性子空间.

定理8.2 设$\{F_{s,t}\}$为压缩型半群，则对任何$f\in \boldsymbol{B}_0$，有

$$(s)\lim_{t\to t_0} F_{s,t}f = F_{s,t_0}f,\ (\text{对}s\geqslant 0\text{一致成立}).$$

证： (1)任取$s\leqslant t\leqslant t_0$，$f\in \boldsymbol{B}_0$；则

$$\begin{aligned}
&\|F_{s,t}f - F_{s,t_0}f\| \leqslant \|F_{s,t}\|\,\|f - F_{t,t_0}f\|\\
&\leqslant \|f - F_{t,t_0}f\|,
\end{aligned}$$

所以，由$f\in \boldsymbol{B}_0$知

$$(s)\lim_{t\to t_0-0} F_{s,t}f = F_{s,t_0}f,\ (\text{对}s\geqslant 0\text{一致成立})。$$

(2) 任取$s\leqslant t_0\leqslant t$，$f\in \boldsymbol{B}_0$，则

$$\|F_{s,t}f - F_{s,t_0}f\| = \|F_{s,t_0}\circ F_{t_0,t}f - F_{s,t_0}f\|$$
$$\leqslant \|F_{t_0,t}f - f\|,$$

所以，由$f\in \boldsymbol{B}_0$知

$$(s)\lim_{t\to t_0+0} F_{s,t}f = F_{s,t_0}f,\ (\text{对}s\geqslant 0\text{一致成立})。$$

定义8.2 若$\{F_{s,t}\}$满足$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}$，则称之为标准的。

定理8.3 对任何标准半群$\{F_{s,t}\}$，恒有

$$(s)\lim_{s\to s_0-0} F_{s,t}f = F_{s_0,t}f,\ (0<s_0\leqslant t<\infty,\ f\in \boldsymbol{B})。$$

证：任取$0<s_0\leqslant t$，$f\in \boldsymbol{B}$，$0\leqslant s<s_0$，由

$$F_{s_0,t}f\in \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0$$

及

$$\|F_{s,t}f - F_{s_0,t}f\| = \|F_{s,s_0}\circ F_{s_0,t}f - F_{s_0,t}f\|$$

可得定理8.3。

定理8.4 设$\{F_{s,t}\}$是标准的压缩型半群，若对某个$s_0\geqslant 0$，有$\lim\limits_{s\to s_0+0}\|F_{s_0,s}-I\|=0$，则

$$(s)\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} F_{s,t}f = F_{s_0,t_0}f,\ (t_0\geqslant s_0,\ t\geqslant s,\ f\in \boldsymbol{B})。$$

证：任取$t_0\geqslant s_0\geqslant 0$，$s\in[s_0,\ t_0]$，$s\leqslant t$，$f\in \boldsymbol{B}$，

则

$$\|F_{s,t_0}f - F_{s_0,t_0}f\| = \|F_{s,t_0}f - F_{s_0,s}\circ F_{s,t_0}f\|$$
$$\leqslant \|I - F_{s_0,s}\|\|f\|,$$

所以由假设可得：

$$(s)\lim_{s\to s_0+0} F_{s,t_0}f = F_{s_0,t_0}f。$$

再利用定理8.3及定理8.2（注意它对s的一致收敛），即得定理8.4。

定理8.5 对任何压缩型的半群$\{F_{s,t}\}$来说，若对某一对$0\leqslant s_0\leqslant t_0$，有

$$\lim_{s\to s_0-0}\|F_{s,s_0}-I\|=\lim_{t\to t_0-0}\|F_{t,t_0}-I\|$$

$$=\lim_{s\to s_0+0}\|F_{s_0,s}-I\|=\lim_{t\to t_0+0}\|F_{t_0,t}-I\|=0,$$

则

(1) $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)}\|F_{s,t}-F_{s_0,t_0}\|=0$,

更有

(2) $\displaystyle(s)\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)}F_{s,t}f=F_{s_0,t_0}f$, $(f\in\boldsymbol{B})$.

证：(1) 先设$s_0<t_0$。有四种情况：(i) $s\leqslant s_0\leqslant t\leqslant t_0$；(ii) $s_0\leqslant s\leqslant t_0\leqslant t$；(iii) $s\leqslant s_0<t_0\leqslant t$；(iv). $s_0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_0$。对于(i)，有

$$\begin{aligned}&\|F_{s,t}-F_{s_0,t_0}\|\\&\leqslant\|F_{s,s_0}\circ F_{s_0,t}-F_{s_0,t}\|+\|F_{s_0,t}-F_{s_0,t}\circ F_{t,t_0}\|\\&\leqslant\|F_{s,s_0}-I\|\|F_{s_0,t}\|+\|F_{s_0,t}\|\|I-F_{t,t_0}\|\\&\leqslant\|F_{s,s_0}-I\|+\|I-F_{t,t_0}\|;\end{aligned}$$

对于(ii)、(iii)、(iv)，亦有类似结果：

$$\begin{aligned}&\|F_{s,t}-F_{s_0,t_0}\|\\&\leqslant\|F_{s\wedge s_0,s\vee s_0}-I\|+\|I-F_{t\wedge t_0,t\vee t_0}\|,\end{aligned}$$

(其$a\wedge b=\min(a,\ b)$，$a\vee b=\max(a,\ b)$)。

再设$s_0=t_0$，有三种情况：(i)$s\leqslant s_0=t_0\leqslant t$；(ii)$s\leqslant t\leqslant s_0=t_0$；(iii)$s_0=t_0\leqslant s\leqslant t$。对于(i)，有：

$$\begin{aligned}&\|F_{s,t}-F_{s_0,t_0}\|\\&\leqslant\|F_{s,s_0}\circ F_{t_0,t}-F_{s,s_0}\|+\|F_{s,s_0}-I\|\\&\leqslant\|F_{t_0,t}-I\|+\|F_{s,s_0}-I\|,\end{aligned}$$

对于(ii)、(iii)亦有类似结果。

总上两步，由定理假设即得(1)。由(1)可得(2)。定理证毕。

本节及下节，恒用$\mathscr{D}(\Omega)$、$\mathscr{R}(\Omega)$表算子Ω的定义域及象域。

定义8.3 设$\{F_{s,t}\}$是压缩型半群，定义算子$R_{\lambda,s}$如下：

$$R_{\lambda,s}f=(s)\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}F_{s,s+t}f\,dt,\quad (\lambda>0,\ s\geqslant 0,\ f\in\boldsymbol{B}_0),$$

称$R_{\lambda,s}$为$\{F_{s,t}\}$的右预解算子。注意，由定理8.2知，当$f\in\boldsymbol{B}_0$时，$F_{s,s+t}f$对t强连续，故上述积分存在。

再定义$R_{\lambda,s}$对s的左（右）微分算子$R_{\lambda,s}^{(-)}(R_{\lambda,s}^{(+)})$如下：

$$\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(-)})=\{f:f\in\boldsymbol{B}_0,\ 存在g\in\boldsymbol{B},\ 使$$

$$(s)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(R_{\lambda,s}f-R_{\lambda,s-h}f)=g.\ \},$$

$$R_{\lambda,s}^{(-)}f=(s)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(R_{\lambda,s}f-R_{\lambda,s-h}f),\ f\in\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(-)}),$$

$$(\lambda>0,\ s>0).$$

仿之可定义$R_{\lambda,s}^{(+)}$，$(\lambda>0,\ s\geqslant 0)$。

定义8.4 设$\{F_{s,t}\}$是标准半群，定义算子$Q_{\lambda,s}(\lambda>0,\ s\geqslant 0)$如下：

$$Q_{\lambda,s}f=(s)\int_0^s e^{-\lambda u}F_{u,s}f\,du,\quad (f\in\boldsymbol{B}),$$

称$Q_{\lambda,s}$为$\{F_{s,t}\}$的左预解算子。注意：由定理1.3得知此时$T_{u,t}f$对u来说左强连续，故上述积分存在。

再定义$Q_{\lambda,s}$对s的左(右)微分算子$Q_{\lambda,s}^{(-)}(Q_{\lambda,s}^{(+)})$如下：

$$\mathscr{D}(Q_{\lambda,s}^{(-)})=\Big\{f:f\in\boldsymbol{B},\ 存在g\in\boldsymbol{B},\ 使$$

$$(s)\lim_{h\to 0+}\frac{Q_{\lambda,s}f-Q_{\lambda,s-h}f}{h}=g\Big\},$$

$$Q_{\lambda,s}^{(-)}f=(s)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(Q_{\lambda,s}f-Q_{\lambda,s-h}f),$$

$$(s>0,\lambda>0,f\in\mathscr{D}(Q_{\lambda,s}^{(-)})).$$

仿之可定义$Q_{\lambda,s}^{(-)}$ （$\lambda>0$，$s\geqslant0$）。

定义8.5 设$\{F_{s,t}\}$是任一半群，定义算子$\Omega_s^{(+)}$ （$s\geqslant0$），如下：

$$\mathscr{D}(\Omega_s^{(+)})=\Big\{f: f\in \boldsymbol{B}_0,\ \text{存在} g\in \boldsymbol{B}_0,\ \text{使}$$

$$(s)\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(F_{s,s+h}f-f)=g\Big\},$$

$$\Omega_s^{(+)}f=(s)\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(F_{s,s+h}f-f),\ (f\in\mathscr{D}(\Omega_s^{(+)}),s\geqslant0),$$

称$\Omega_s^{(+)}$为$\{F_{s,t}\}$的右无穷小算子。

仿之可定义$\{F_{s,t}\}$的左无穷小算子$\Omega_s^{(-)}$，（$s>0$）。

显然$\Omega_s^{(+)}$、$\Omega_s^{(-)}$皆线性（不一定有界）算子。

定理8.6 设$\{F_{s,t}\}$是压缩型半群，则

（1） $f\in\mathscr{D}(\Omega_t^{(+)})\Longrightarrow(s)\dfrac{\partial^+}{\partial t}(F_{s,t}f)=F_{s,t}\circ\Omega_t^{(+)}f$；

（2） $f\in\mathscr{D}(\Omega_t^{(-)})$，且$\lim\limits_{h\to0+}\|F_{s,s+h}-I\|$

$$=\lim_{h\to0+}\|F_{t,t+h}-I\|=\lim_{h\to0+}\|F_{t-h,t}-I\|$$

$$=\lim_{h\to0+}\|F_{s,s-h}-I\|=0\Longrightarrow(s)\frac{\partial^-}{\partial t}(F_{s,t}f)=F_{s,t}\circ\Omega_t^{(-)}f.$$

证：（1） 由$F_{s,t}$是有界线性算子（当然连续）及半群性即得（1）。

（2） 因为

$$\Big\|\frac{1}{h}(F_{s,t}f-F_{s,t-h}f)-F_{s,t}\circ\Omega_t^{(-)}f\Big\|$$

$$\leqslant\Big\|F_{s,t-h}-F_{s,t}\Big\|\Big\|\frac{1}{h}(F_{t-h,t}f-f)\Big\|$$

$$+\Big\|F_{s,t}\Big\|\Big\|\frac{1}{h}(F_{t-h,t}f-f)-\Omega_t^{(-)}f\Big\|,$$

而由$f\in\mathscr{D}(\Omega_t^{(-)})$有

$$\sup_{h>0}\left\|\frac{1}{h}(F_{t-h,t}f-f)\right\|<\infty;$$

$$\lim_{h\to 0+}\left\|\frac{1}{h}(F_{t-h,t}f-f)-\Omega_t^{(-)}f\right\|=0,$$

由假设及定理8.5有

$$\lim_{h\to 0+}\|F_{s,t-h}-F_{s,t}\|=0.$$

总上三点，(2) 得证。

定义8.6 称半群$\{F_{s,t}\}$是拟时齐的，如果对任何$f\in \boldsymbol{B}$，$0\leqslant s\leqslant t<\infty$，存在$g_{s,t}\in \boldsymbol{B}$，使

$$(s)\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(F_{s+h,t+h}-F_{s,t})f=g_{s,t}$$

对$0\leqslant s\leqslant t<\infty$一致成立。

若$F_{s+h,t+h}=F_{s,t}$对一切$0\leqslant s\leqslant t<\infty$，$h>0$成立，则称$\{F_{s,t}\}$是时齐的。显然时齐的半群一定是拟时齐的。

定理8.7 设$\{F_{s,t}\}$是拟时齐的压缩型半群，则

$\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(-)})=\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(+)})=\boldsymbol{B}_0$，$R_{\lambda,s}^{(-)}=R_{\lambda,s}^{(+)}$，$(\lambda>0, s\geqslant 0)$。

证：任取$f\in \boldsymbol{B}_0$，由$\{F_{s,t}\}$的拟时齐性有：

$$(s)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F_{s+h,s+t+h}-F_{s,s+t})f=g_{s,s+t}\in \boldsymbol{B}$$

对$0\leqslant s$, $t<\infty$一致成立。而由定理8.2，$F_{s,s+t}f$对t强连续，故$g_{s,s+t}$亦然。所以

$$(s)\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_{s,s+t}dt\in \boldsymbol{B}$$

存在。因此，

$$(s)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(R_{\lambda,s+h}-R_{\lambda,s})f$$

$$=(s)\lim_{h\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{1}{h}(F_{s+h,s+t+h}-F_{s,s+t})fdt$$

$$= (s)\int_0^\infty e^{-\lambda t} g_{s,s+t} dt \in \boldsymbol{B},$$

定理8.8 设$\{F_{s,t}\}$是压缩型半群，则

(1) $R_{\lambda,s}$是$\boldsymbol{B}_0$上的有界线性算子，且

$$\|R_{\lambda,s}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \quad (s \geqslant 0,\ \lambda > 0);$$

(2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sup\limits_{s\geqslant 0}\|\lambda R_{\lambda,s} f - f\| = 0$, $(f \in \boldsymbol{B}_0)$.

证：(1) 显然$R_{\lambda,s}$是$\boldsymbol{B}_0$上的线性算子，而且

$$\|R_{\lambda,s}\| \leqslant \sup_{\|f\|=1, f\in B_0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|F_{s,s+t} f\| dt$$

$$\leqslant \sup_{\|f\|=1, f\in B_0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

(2) $$\|\lambda R_{\lambda,s} f - f\| \leqslant \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \|(F_{s,s+t} - I) f\| dt$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-u} \|(F_{s,s+\frac{u}{\lambda}} - I)\| du,$$

但是，由$f \in \boldsymbol{B}_0$及定理8.2有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{s\geqslant 0} \|(F_{s,s+\frac{u}{\lambda}} - I) f\| = 0.$$

又因为

$$\|(F_{s,s+\frac{u}{\lambda}} - I) f\| \leqslant 2\|f\|,$$

所以由控制收敛定理立得(2).

定理8.9 若压缩型半群$\{F_{s,t}\}$满足

$$\lim_{h\to 0+} \|F_{s,s+h} - I\| = \lim_{h\to 0+} \|F_{s-h,s} - I\| = 0, \quad (\text{一切} s \geqslant 0),$$

则有

(1) $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}$;

(2) $\lim\limits_{u\to s} \|R_{\lambda,u} - R_{\lambda,s}\| = 0$, $(s \geqslant 0,\ \lambda > 0)$,

更有，对任何$f \in \boldsymbol{B}$, $\lambda > 0$, $R_{\lambda,s} f$对s强连续.

证：由定理8.5即得(1). 至于(2)，只须注意

$$\|R_{\lambda,s}-R_{\lambda,r}\|\leqslant\int_0^\infty e^{-\lambda t}\|F_{u,u+t}-F_{s,s+t}\|dt$$

及定理8.5，并应用控制收敛定理即可得。

定理8.10 在定理8.9的条件下，对任何$f\in\boldsymbol{B}$，均有

$$R_{\lambda,s}f\in\mathscr{D}(\Omega_s^{(-)})\Longleftrightarrow f\in\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(-)});$$

而且这时有：

$$\Omega_s^{(-)}\circ R_{\lambda,s}f=\lambda R_{\lambda,s}f-f=R_{\lambda,s}^{(-)}f.$$

证 由定理8.9有 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}$，$\mathscr{D}(R_{\lambda,s})=\boldsymbol{B}$。任取$f\in\boldsymbol{B}$，有

$$\frac{1}{h}(F_{s-h,s}\circ R_{\lambda,s}f-R_{\lambda,s}f)$$

$$=\frac{1}{h}\left((s)\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}F_{s-h,t}fdt-R_{\lambda,s}f\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(R_{\lambda,s-h}fe^{h\lambda}-(s)\int_{s-h}^s e^{-\lambda(t-s)}F_{s-h,t}fdt-R_{\lambda,s}f\right).$$

但是，由定理假设及定理8.5得知$R_{s,t}f$对(s,t)二元强连续，所以任给$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得：

$$h<\delta\Longrightarrow\|e^{-\lambda(t-s)}F_{s-h,t}f-f\|<\varepsilon,\quad(s-h\leqslant t\leqslant s).$$

故

$$(s)\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(s)\int_{s-h}^s e^{-\lambda(t-s)}F_{s-h,t}fdt=f,$$

所以

$$(s)\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(F_{s-h,s}\circ R_{\lambda,s}f-R_{\lambda,s}f)$$

存在且属于$\boldsymbol{B}$的充要条件是

$$(s)\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(R_{\lambda,s-h}e^{h\lambda}f-R_{\lambda,s}f)$$

存在且属于$\boldsymbol{B}$。但是

$$(s)\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(R_{\lambda,s-h}e^{h\lambda}f-R_{\lambda,s}f)$$

$$=(s)\lim_{h\to 0+} R_{\lambda,s-h}\left(\frac{e^{h\lambda}f-f}{h}\right)$$

$$+(s)\lim_{h\to 0+}\frac{(R_{\lambda,s-h}-R_{\lambda,s})f}{h},$$

而由定理8.9有 $\lim_{s\to s_0}\|R_{\lambda,s}-R_{\lambda,s_0}\|=0$，(对一切 $s_0\geqslant 0$)，所以

$$\limsup_{h\to 0+}\left\|R_{\lambda,s-h}\left(\frac{e^{h\lambda}f-f}{h}\right)-\lambda R_{\lambda,s}f\right\|$$

$$\leqslant\limsup_{h\to 0+}\|R_{\lambda,s-h}-R_{\lambda,s}\|\left\|\frac{e^{h\lambda}f-f}{h}\right\|$$

$$+\limsup_{h\to 0+}\|R_{\lambda,s}\|\left\|\frac{e^{h\lambda}f-f}{h}-\lambda f\right\|=0.$$

此即

$$(s)\lim_{h\to 0+} R_{\lambda,s-h}\left(\frac{e^{h\lambda}f-f}{h}\right)=\lambda R_{\lambda,s}f$$

存在。因此，

$$(s)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(F_{s-h,s}\circ R_{\lambda,s}f-R_{\lambda,s}f)$$

存在且属于$\boldsymbol{B}$的充要条件是

$$(s)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\left(R_{\lambda,s-h}f-R_{\lambda,s}f\right)$$

存在且属于$\boldsymbol{B}$。此即

$$R_{\lambda,s}f\in\mathscr{D}(\Omega_s^{(-)})\Longleftrightarrow f\in\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(-)}).$$

显然，此时有$\Omega_s^{(-)}\circ R_{\lambda,s}f=\lambda R_{\lambda,s}f-f-R_{\lambda,s}^{(-)}f$。定理证毕。

系1 $\mathscr{D}(\Omega_s^{(-)})$ 在 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(R_{n,s}^{(-)})$中稠。

证： 任取 $f\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(R_{n,s}^{(-)})$，则 $nR_{n,s}f\in\mathscr{D}(\Omega_s^{(-)})$ 而由定理8.8有：

$$f=(s)\lim_{n\to\infty} nR_{n,s} f,$$

此即 $\mathscr{D}(\Omega_s^{(-)})$ 在 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(R_{n,s}^{(-)})$中稠。

定理8.11 若拟时齐的压缩型的半群$\{F_{s,t}\}$满足：

$$\lim_{h\to 0+}\|F_{s,s+h}-I\|=\lim_{h\to 0+}\|F_{s-h,s}-I\|=0,(s\geqslant 0),$$

则有：

(1) $\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(-)})=\mathscr{D}(R_{\lambda,s}^{(+)})=\boldsymbol{B}$,

$R_{\lambda,s}^{(-)}=R_{\lambda,s}^{(+)}$, $(\lambda>0,\ s\geqslant 0)$;

(2) $\mathscr{D}(\Omega_s^{(-)})$在$\boldsymbol{B}$中稠，$(s\geqslant 0)$;

(3) $\Omega_s^{(-)}\circ R_{\lambda,s} f=\lambda R_{\lambda,s} f-f-R_{\lambda,s}^{(-)}f$

$=\lambda R_{\lambda,s} f-f-R_{\lambda,s}^{(+)}f$,

$(s\geqslant 0,\ \lambda>0,\ f\in\boldsymbol{B})$。

证：由定理8.7、定理8.10及系1即得此定理。

定理8.12 在定理8.9的条件下，有：

$$\mathscr{D}(\Omega_s^{(+)})\subset\bigcap_{\lambda>0}\mathscr{D}(Q_{\lambda,s}^{(+)});$$

$$Q_{\lambda,s}\circ\Omega_s^{(+)}f=Q_{\lambda,s}^{(+)}f-f,\quad (f\in\mathscr{D}(\Omega_s^{(+)}))。$$

证：$Q_{\lambda,s}\circ F_{s,s+h}f-Q_{\lambda,s}f$

$$=(s)\int_0^s e^{-\lambda u}F_{u,s}\circ F_{s,s+h}f du-Q_{\lambda,s}f$$

$$=Q_{\lambda,s+h}f-(s)\int_0^{s+h} e^{-\lambda u}F_{u,s+h}f du-Q_{\lambda,s}f,$$

而由$F_{s,t}f$对$(s,\ t)$二元强连续得

$$(s)\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(s)\int_s^{s+h} e^{-\lambda u}F_{u,s+h}f du=f$$

存在，所以，由$Q_{\lambda,s}$是有界线性算子即得定理8.12。

§9 标准准转移函数所产生的双参数算子半群

本节恒设$P(s, t, x, A)$为可测空间$(E, \mathscr{E})$上的标准的准转移函数，$\mathscr{M}$为$(E, \mathscr{E})$上的一切有界实值$\mathscr{E}$可测函数，按通常的线性运算并定义范数为$\|f\| = \sup\limits_{x \in E}|f(x)|$，$(f \in \mathscr{M})$，则成Banach空间。定义一族由$\mathscr{M}$到$\mathscr{M}$的算子如下：

$$(P_{s,t}f)(x) = \int_E P(s, t, x, dy)f(y),$$

$$(f \in \mathscr{M}, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty, x \in E),$$

易证：$\{P_{s,t}, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$是一个压缩型的半群，称之为$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{M}$上所产生的半群。

设$\mathscr{L}$是$(E, \mathscr{E})$上的一切实值的完全可加的集合函数，按通常的线性运算，并定义范数为

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\varphi(A_i)| : \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E, \ A_iA_j = \emptyset (i \neq j), \right.$$

$$\left. A_i \in \mathscr{E}\right\},$$

$(\varphi \in \mathscr{L})$，则$\mathscr{L}$亦成一Banach 空间。定义一族由$\mathscr{L}$到$\mathscr{L}$的算子如下：

$$(V_{s,t}\varphi)(A) = \int_E \varphi(dx)P(s, t, x, A),$$

$$(\varphi \in \mathscr{L}, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty, A \in \mathscr{E}),$$

易证：当$P_{s,t+u} = P_{s+t,s+t+u} \cdot P_{s,s+t}$时$\{V_{s,t}, 0 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$亦为压缩型半群，称之为$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{L}$上产生之半群。

注意：由Hahn分解有：$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$，$|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$；$\varphi^+$、$\varphi^-$、$|\varphi|$均为有限测度，且$\|\varphi\| = |\varphi|(E)$。

定理9.1 若$P(s, t, x, A)$满足

$$\lim_{t \to s+0} \sup_{x \in E}(1 - P(s, t, x, \{x\}))$$

$$=\lim_{s\to t-0}\sup_{x\in E}(1-P(s,\ t,\ x,\ \{x\}))$$

$$=0,\ (s\geqslant 0,\ t>0),$$

则有：

(1) $\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)}\|P_{s,t}-P_{s_0,t_0}\|$

$$=\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)}\|V_{s,t}-V_{s_0,t_0}\|=0,\ (0\leqslant s_0\leqslant t_0);$$

(2) $(s)\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)}P_{s,t}f=P_{s_0,t_0}f,\ (f\in\mathscr{M},\ 0\leqslant s_0\leqslant t_0),$

$(s)\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)}V_{s,t}\varphi=V_{s_0,t_0}\varphi,\ (\varphi\in\mathscr{L},\ 0\leqslant s_0\leqslant t_0)$ 。

证：(1) 任取$s_0>0$，$s<s_0$，记 $\delta(x,A)=I_A(x)$，有

$$\|P_{s,s_0}-I\|=\sup_{\|f\|=1}\left\|\int_E(P(s,s_0,x,dy)-\delta(x,\ dy))f(y)\right\|$$

$$=\sup_{\|f\|=1}\ \sup_{x\in E}\Big|(P(s,s_0,x,\{x\})-1)f(x)$$

$$+\int_{E-\{x\}}P(s,s_0,x,dy)f(y)\Big|$$

$$\leqslant\sup_{x\in E}|P(s,s_0,x,\{x\})-1|+\sup_{x\in E}P(s,s_0,x,E-\{x\})$$

$$\leqslant 2\ \sup_{x\in E}|P(s,s_0,x,\{x\})-1|,$$

所以，由假设即得 $\lim_{s\to s_0-0}\|P_{s,s_0}-I\|=0$，$(s_0>0)$。

仿之可证：$\lim_{s\to s_0+0}\|P_{s_0,s}-I\|=0$，$(s_0\geqslant 0)$。由定理8.5即得第一式。

由定理假设易证：

$$\lim_{s\to s_0-0}\sup_{\substack{x\in E\\ A\in\mathscr{E}}}|P(s,s_0,\ x,\ A)-\delta(x,\ A)|=0,\ (s_0>0),$$

$$\lim_{s\to s_0+0}\sup_{\substack{x\in E\\ A\in\mathscr{E}}}|P(s_0,s,x,A)-\delta(x,A)|=0,\ (s_0\geqslant 0),$$

所以，任给$\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当$|s-s_0|<\delta$时有

$$\sup_{\substack{x\in E\\ A\in\mathscr{E}}}|P(s\wedge s_0,s\vee s_0,x,A)-\delta(x,A)|\leqslant\varepsilon,\qquad(9.1)$$

今任取$s_0>0$固定，$s\leqslant s_0$，则

$$\|V_{s,s_0}-I\|=\sup_{\|\varphi\|=1}\left\|\int_E \varphi(dx)(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A))\right\|$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|=1}\left(\left\|\int_E \varphi^+(dx)(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A))\right\|\right.$$

$$\left.+\left\|\int_E \varphi^-(dx)(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A))\right\|\right).$$

令

$$\psi_{s,s_0}^{(1)}(A)=\int_E \varphi^+(dx)(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A)),$$

则

$$|\psi_{s,s_0}^{(1)}(A)|\leqslant\int_A \varphi^+(dx)(1-P(s,s_0,x,A))$$

$$+\int_{E-A}\varphi^+(dx)P(s,s_0,x,A)$$

$$=\int_E \varphi^+(dx)[2\delta(x,A)(\delta(x,A)-P(s,s_0,x,A))$$

$$+(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A))].$$

所以，任取$A_i\in\mathscr{E}$，$A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=E$，有

$$\sum_{i=1}^{n}|\psi_{s,s_0}^{(1)}(A_i)|$$

$$\leqslant\int_E \varphi^+(dx)\sum_{i=1}^{n}[2\delta(x,A_i)(\delta(x,A_i)-P(s,s_0,x,A_i))$$

$$+(P(s,s_0,x,A_i)-\delta(x,A_i))]$$

$$=\int_E \varphi^+(dx)\left[\sum_{i=1}^{n}2\delta(x,A_i)(\delta(x,A_i)-P(s,s_0,x,A_i))\right.$$

$$\left.+P(s,s_0,x,E)-1\right].$$

因此，当$|s-s_0|<\delta$时，由(9.1)有

$$\sum_{i=1}^{n} |\psi_{s,s_0}^{(1)}(A_i)| \leqslant \int_E \varphi^+(dx)\left[\sum_{i=1}^{n} 2\delta(x,A_i)\varepsilon+\varepsilon\right]$$

$$=3\varepsilon\|\varphi^+\|\leqslant 3\varepsilon\|\varphi\|,$$

从而

$$\|\psi_{s,s_0}^{(1)}\|\leqslant 3\varepsilon\|\varphi\|,$$

故

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\left\|\int_E \varphi^+(dx)(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A))\right\|\leqslant 3\varepsilon,$$

$$(|s-s_0|<\delta).$$

仿之可证：

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\left\|\int_E \varphi^-(dx)(P(s,s_0,x,A)-\delta(x,A))\right\|\leqslant 3\varepsilon,$$

$$(|s-s_0|<\delta).$$

由$\varepsilon>0$可以任意小得知

$$\lim_{s\to s_0-0}\|V_{s,s_0}-I\|=0,\quad (s_0>0).$$

仿之可证：

$$\lim_{s\to s_0+0}\|V_{s_0,s}-I\|=0,\quad (s_0\geqslant 0).$$

再用定理8.5即得(1)之第二式。

(2) 由(1)即得(2)，定理证毕。

定义9.1 设$P(s,t,x,A)$是任一标准准转移函数，若

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P(s+h,t+h,x,A)-P(s,t,x,A))$$

$$=g(s,t,x,A)$$

对一切$0\leqslant s\leqslant t<\infty$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$一致成立，$g$是$s$，$t$，$x$，$A$的四元有界实值函数，则称$P(s,t,x,A)$是拟时齐的。显然时齐的标准准转移函数必为拟时齐的。

易见，固定s，t，A，$g(s,t,\cdot,A)\in\mathscr{M}$；固定$s$，$t$，$x$，$g(s,t,x,\cdot)\in\mathscr{S}$。

定理9.2 设$\{P_{s,t}\}$、$\{V_{s,t}\}$分别为$P(s, t, x, A)$在$\mathscr{M}$及$\mathscr{L}$上所产生的半群，如果$P(s,t,x,A)$具有拟时齐性，则$\{P_{s,t}\}$、$\{V_{s,t}\}$也具有拟时齐性。

先证明：

引理9.1 设$\mu_{n,t}$，$\mu_t\in\mathscr{L}$，$f\in\mathscr{M}$，若对任何$A\in\mathscr{E}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{n,t}(A)=\mu_t(A),\ (\text{在}t\in\Gamma\text{上一致成立}),$$

且

$$\sup_{t\in\Gamma,A\in\mathscr{E}}|\mu_t(A)|\leqslant M<\infty,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f\,d\mu_{n,t}=\int_E f\,d\mu_t(\text{在}t\in\Gamma\text{上一致成立}).$$

证：由于$f\in\mathscr{M}$，所以存在一串简单函数$\{g_m\}$，在E上一致收敛到f。而

$$\begin{aligned}&\left|\int_E f\ d\mu_{n,t}-\int_E f\ d\mu_t\right|\\ \leqslant&\left|\int_E f\ d\mu_{n,t}-\int_E g_m\ d\mu_{n,t}\right|+\left|\int_E g_m d\mu_{n,t}-\int_E g_m d\mu_t\right|\\ &+\left|\int_E g_m\ d\mu_t-\int_E f\ d\mu_t\right|,\end{aligned}\tag{9.2}$$

由g_m是简单函数及引理假设有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in\Gamma}\left|\int_E g_m d\mu_{n,t}-\int_E g_m\ d\mu_t\right|=0,\quad(m\geqslant 1).$$

由$\{g_m\}$一致收敛到f及$\sup\limits_{\substack{t\in\Gamma\\ A\in\mathscr{E}}}|\mu_t(A)|\leqslant M$ 有

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in\Gamma}\left|\int_E g_m\,d\mu_t-\int_E f\,d\mu_t\right|=0.$$

由引理假设知：存在N_0，使

$$|\mu_{n,t}(A)|\leqslant M+1,\ (\text{一切}n\geqslant N_0,\ t\in\Gamma,\ A\in\mathscr{E}),$$

再注意$\{g_m\}$一致收敛到f即可得：

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in T}\left|\int_E g_m d\mu_{n,t}-\int_E f d\mu_{n,t}\right|=0,\quad (n\geqslant N_0)。$$

总之，在(9.2)中，先令$n\to\infty$，次令$m\to\infty$即得引理9.1。

下面利用引理来证明定理。先证$\{P_{s,t}\}$的拟时齐性。令

$$\mu(s,\ t,\ x,\ A)=g(s,\ t,\ x,\ A),$$

$$\mu_h(s,t,x,A)=\frac{1}{h}(P(s+h,t+h,x,A)$$
$$-P(s,\ t,\ x,\ A)),$$

取$f\in\mathscr{M}$，则$\mu_h(s,\ t,\ x,\cdot)$，$\mu(s,\ t,\ x,\cdot)$，f均满足引理9.1的条件，所以

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant t<\infty}\left\|\left(\frac{P_{s+h,t+h}-P_{s,t}}{h}\right)f-\int_E g(s,t,\cdot,dy)f(y)\right\|$$

$$=\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant t<\infty\\ x\in E}}\left|\int_E \mu_h(s,t,x,\ dy)f(y)\right.$$
$$\left.-\int_E\mu(s,\ t,\ x,\ dy)f(y)\right|=0。$$

此即$\{P_{s,t}\}$具有拟时齐性。

最后证明$\{V_{s,t}\}$具有拟时齐性。任取$\varphi\in\mathscr{L}$，令

$$\psi_{h,s,t}(A)=\int_E\varphi(dx)\left[\frac{1}{h}(P(s+h,t+h,x,A)-P(s,t,x,A))\right.$$
$$\left.-g(s,\ t,\ x,\ A)\right],$$

再令$A^+_{h,s,t}$、$A^-_{h,s,t}$分别为$\psi_{h,s,t}$的Hahn分解的正、负集。由定理假设有

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant t<\infty\\ A\subset E}}|\psi_{h,s,t}(A)|=0,$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant t<\infty}\left\|\frac{(V_{s+h,t+h}-V_{s,t})}{h}\varphi\right.$$
$$\left.-\int_E\varphi(dx)g(s,\ t,\ x,\ \cdot)\right\|$$

$$= \lim_{h\to 0} \sup_{0\leq s\leq t<\infty} \|\psi_{h,s,t}\|$$

$$= \lim_{h\to 0+} \sup_{0\leq s\leq t<\infty} |\psi_{h,s,t}|(E)$$

$$= \lim_{h\to 0+} \sup_{0\leq s\leq t<\infty} [\psi_{h,s,t}(A^{+}_{h,s,t}) - \psi_{h,s,t}(A^{-}_{h,s,t})]$$

$$= 0.$$

此即$\{V_{s,t}\}$具有拟时齐性。定理证毕。

定理9.3 设 $P(s,t,x,A)$ 具有拟时齐性且满足定理9.1中的条件，$\{P_{s,t}\}$、$\{V_{s,t}\}$分别为$P(s,t,x,A)$在$\mathscr{M}$ 及 $\mathscr{L}$ 中所产生的半群，$R_{\lambda,s}[P]$、$\Omega^{(-)}_{s}[P]$ 分别为 $\{P_{s,t}\}$ 的右预解算子及左无穷小算子，$R_{\lambda,s}[V]$、$\Omega^{(-)}_{s}[V]$分别为 $\{V_{s,t}\}$ 的右预解算子及左无穷小算子，则

(1) $\mathscr{D}(R^{(-)}_{\lambda,s}[P]) = \mathscr{D}(R^{(+)}_{\lambda,s}[P]) = \mathscr{M}$,

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0)$,

$\mathscr{D}(R^{(-)}_{\lambda,s}[V]) = \mathscr{D}(R^{(+)}_{\lambda,s}[V]) = \mathscr{L}$,

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0)$,

$R^{(-)}_{\lambda,s}[P] = R^{(+)}_{\lambda,s}[P]$, $R^{(-)}_{\lambda,s}[V] = R^{+}_{\lambda,s}[V]$,

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0)$,

($R^{(-)}_{\lambda,s}$、$R^{(+)}_{\lambda,s}$仍表$R_{\lambda,s}$对s的左、右微分算子)；

(2) $\mathscr{D}(\Omega^{(-)}_{s}[P])$和$\mathscr{D}(\Omega^{(-)}_{s}[V])$分别在$\mathscr{M}$和$\mathscr{L}$中稠，$(s\geqslant 0)$；

(3) $$\Omega^{(-)}_{s}[P]\circ R_{\lambda,s}[P]f = \lambda R_{\lambda,s}[P]f - f - R^{(-)}_{\lambda,s}[P]f$$
$$= \lambda R_{\lambda,s}[P]f - f - R^{(+)}_{\lambda,s}[P]f,$$

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0,\ f\in\mathscr{M})$；

$$\Omega^{(-)}_{s}[V]\circ R_{\lambda,s}[V]\varphi = \lambda R_{\lambda,s}[V]\varphi - \varphi - R^{(-)}_{\lambda,s}[V]\varphi$$
$$= \lambda R_{\lambda,s}[V]\varphi - \varphi - R^{(+)}_{\lambda,s}[V]\varphi,$$

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0,\ \varphi\in\mathscr{L})$.

证：由定理9.1，9.2和定理8.11即得此定理。

§ 10 准转移函数的强遍历性

J.L.Doob在[39]中对时齐的准转移函数 $P(t,x,A)$的遍历性理论，作了系统的研究。本节着重讨论非时齐的准转移函数$P(s,t,x,A)$的强遍历性。

设 $(E,\mathscr{E})$、$\mathscr{M}$、$\mathscr{L}$如§9所定义。

定义10.1 称某数域$\mathscr{K}$（下面多取为实数域或复数域）上的线性空间$\mathscr{A}$为一个代数，如果对任意 f，$g\in\mathscr{A}$，存在唯一一个乘积$fg\in\mathscr{A}$具有下列性质：

(1) 结合性：$(fg)h=f(gh)$，$f,g,h\in\mathscr{A}$；

(2) 分配性：$f(g+h)=fg+fh$，$(g+h)f=gf+hf$，f，g，$h\in\mathscr{A}$；

(3) $\alpha\beta(fg)=(\alpha f)(\beta g)$，$\alpha$，$\beta\in\mathscr{K}$，$f$，$g\in\mathscr{A}$；

(4) 有单位元素e，使$ef=fe=f$，$f\in\mathscr{A}$。称代数$\mathscr{A}$是一个Banach代数，如果$\mathscr{A}$还是一个Banach空间，且满足

(5) $\|fg\|\leqslant\|f\|\|g\|$，$f$，$g\in\mathscr{A}$

(6) $\|e\|=1$。

注意：由(5)和范数的三角不等式得：

$$\begin{aligned}\|f_ng_n-fg\|&\leqslant\|f_n(g_n-g)\|+\|(f_n-f)g\|\\&\leqslant\|f_n\|\|g_n-g\|+\|f_n-f\|\|g\|,\end{aligned}$$

所以 fg对f和g连续(依范数)。

令

$$\widetilde{\mathscr{A}}=\Big\{\mu(x,A):\begin{array}{l}\text{对任意}x\in E,\ \mu(x,\cdot)\in\mathscr{L},\\ \text{对任意}A\in\mathscr{E},\mu(\cdot,A)\in\mathscr{M},\end{array}\quad \sup_{x\in E}\|\mu(x,\cdot)\|<\infty\Big\},\tag{10.1}$$

在$\widetilde{\mathscr{A}}$中依通常习惯定义加法与数量乘法，并定义$\widetilde{\mathscr{A}}$中二元素μ_1，

μ_2的乘法如下：

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, A)$$
$$= \int_E \mu_1(x, dy)\mu_2(y, A), \quad (x \in E, \ A \in \mathscr{E}), \tag{10.2}$$

再在$\widetilde{\mathscr{A}}$中定义范数如下：

$$\|\mu\| = \sup_{x \in E} \|\mu(x, \cdot)\|, \tag{10.3}$$

则有 $\|I_A(x)\| = 1$，$I_A(x)$是$\widetilde{\mathscr{A}}$中的单位元素，记之为I，且

$$\|\mu_1 \otimes \mu_2\| \leqslant \|\mu_1\| \|\mu_2\|, \quad \mu_1, \mu_2 \in \widetilde{\mathscr{A}}.$$

若注意$\mathscr{L}$是Banach空间，且应用下面的命题10.1，则易证$\widetilde{\mathscr{A}}$是一个Banach代数。

命题10.1 若$f_n \in \mathscr{M}$，$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$，$(x \in E)$，则

$$\lim_{m, n \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

证：只证“$\Rightarrow$”.谬设

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| \neq 0,$$

则存在$\varepsilon_0 > 0$，及$\{n_k\}$、$\{x_k\}$，使$n_k \uparrow \infty$，

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0, \quad (k \geqslant 1).$$ 但是，由

$$\lim_{m, n \to \infty} \|f_m - f_n\| = 0$$

得知：存在N(不依赖$x \in E$)使

$$m, n \geqslant N \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

选取一个固定的k，使$n_k \geqslant N$，则存在一个K，使$n \geqslant k$时有

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

因此

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \leqslant |f_{n_k}(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon_0,$$

矛盾。命题得证。

定义10.2. 设 $\mathscr{A}$ 是实数域 R^1 上的一个代数，令 $\mathscr{A}_c=\mathscr{A}\times\mathscr{A}=\{(f,g): f,g\in\mathscr{A}\}$，在 $\mathscr{A}_c$ 中定义代数运算如下：

$(f,g)+(f',g')=(f+f',\ g+g')$

$(\alpha+\beta i)\ (f,g)=(\alpha f-\beta g,\ \alpha g+\beta f)$

$(f,g)\ (f',g')=(ff'-gg',fg'+f'g)$

$(\alpha,\beta\in R^1,\ f,g,f',g'\in\mathscr{A})$，

则 $\mathscr{A}_c$ 是复数域 $\mathscr{K}$ 上的一个代数，$\mathscr{A}_c$ 称为 $\mathscr{A}$ 的"复化"代数。

熟知（参看[24]定理1.3.2)：若 $\mathscr{A}$ 是实数域 R^1 上的一个 *Banach* 代数，其中范数用 $\|\cdot\|_A$ 记之，则在 $\mathscr{A}_c$ 中可定义一个范数 $\|\cdot\|_{A_c}$，使 $\mathscr{A}_c$ 成 *Banach* 代数，且 $\|f\|_A=\|(f,0)\|_{A_c}$。$\mathscr{A}_c$ 亦称为 *Banach* 代数 $\mathscr{A}$ 的"复化"。

定义10.3. 称 *Banach* 代数 $\mathscr{A}$ 中的元素 f 是正则的，如果存在 $g\in\mathscr{A}$，使 $fg=gf=e$，(e 是 $\mathscr{A}$ 中的单位元素) g 称为 f 之逆元素，记之为 $g=f^{-1}$。反之称 f 是奇异的。

易见，若 f 是正则的，其逆必唯一。

定义10.4. 设 $\mathscr{A}$ 是复数域 $\mathscr{K}$ 上的 *Banach* 代数，$f\in\mathscr{A}$，称

$\sigma_A(f)=\{\lambda:\ \lambda e-f$ 奇异，$\lambda\in\mathscr{K}\}$

为 f 的谱。

若 $\mathscr{A}$ 是实数域 R^1 上的 *Banach* 代数，$f\in\mathscr{A}$，则定义 f 的谱为 $(f,0)$ 作为 $\mathscr{A}_c$ 中的元素的谱，即

$\sigma_A(f)=\sigma_{A_c}((f,0))=\{\lambda:\lambda(e,0)-(f,0)$ 奇异，$\lambda\in\mathscr{K}\}$。

称 $r_A(f)\equiv\sup\{|x|:\lambda\in\sigma_A(f)\}$ 为 f 的谱半径。

对任意 *Banach* 代数 $\mathscr{A}$（实数域上或复数域上的），任意 $f\in\mathscr{A}$，$\sigma_A(f)$ 是非空有界闭集且 $r(f)=\lim\limits_{n\to\infty}\|f^n\|^{\frac{1}{n}}=\inf\limits_{n\geq1}\|f^n\|^{\frac{1}{n}}$。（参看[24]定理1.4.1及定理1.6.4)。简记 $\sigma_A(f)$、$r_A(f)$ 为 $\sigma(f)$、$r(f)$。

命题10.2. 对任何 $f\in\mathscr{A}$，总有 $r(f^k)=r(f)^k$，$(k\geq1)$。

证：用 *Banach* 代数的范数的乘法不等式有

$$r(f^k)=\lim_{n\to\infty}\|f^{n\cdot k}\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}(\|f^n\|^{\frac{k}{n}})=r(f)^k。$$

但是

$$r(f^k)=\inf_{n\geqslant 1}\|f^{n\cdot k}\|^{\frac{1}{n}}=(\inf_{n\geqslant 1}\|f^{n\cdot k}\|^{\frac{1}{n k}})^k$$

$$\geqslant(\inf_{n\geqslant 1}\|f^n\|^{\frac{1}{n}})^k=r(f)^k。$$

下面我们研究（10.1）所定义的 *Banach* 代数 $\widetilde{\mathscr{A}}$。

对任何$\mu\in\widetilde{\mathscr{A}}$，令

$$\mu^n=\overbrace{\mu\otimes\mu\otimes\cdots\otimes\mu}^{n\text{个}} \tag{10.4}$$

$$\delta(\mu)=\frac{1}{2}\sup_{x,\,y\in E}\|\mu(x,\cdot)-\mu(y,\cdot)\|, \tag{10.5}$$

再令

$\mathscr{M}^+=\{f:\ f\in\mathscr{M},\ f\geqslant 0\}$；

$\mathscr{L}^+=\{\psi:\ \psi\in\mathscr{L},\ \psi\geqslant 0\}$，（$\psi^+,\psi^-,|\psi|$如常义）；

$\widetilde{\mathscr{A}}^+=\{\mu:\ \mu\in\widetilde{\mathscr{A}},\ \mu\geqslant 0\}$。

显然当$\psi\in\mathscr{L}$时，ψ亦可视为$\widetilde{\mathscr{A}}$中的元素，且ψ在$\mathscr{L}$中的范数与在$\widetilde{\mathscr{A}}$中的范数一样，而且$\mathscr{L}$是$\widetilde{\mathscr{A}}$的闭线性子空间。

命题10.3. 设$\mu_i\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$\mu_i(x,E)\equiv c_i$不依赖$x\in E$，$(i=1,2)$，$\mu=\mu_1\otimes\mu_2$，则

$$\delta(\mu)\leqslant\delta(\mu_1)\cdot\delta(\mu_2)。$$

证：因为$\mu_i(x,E)\equiv c_i$，所以$\mu(x,E)\equiv c_1c_2$，因此

$$(\mu_i(x,\cdot)-\mu_i(y,\cdot))^+(E)=(\mu_i(x,\cdot)-\mu_i(y,\cdot))^-(E),$$

$$(\mu(x,\cdot)-\mu(y,\cdot))^+(E)=(\mu(x,\cdot)-\mu(y,\cdot))^-(E)。$$

所以

$$\delta(\mu_i)=\sup_{x,\,y\in E}((\mu_i(x,\cdot)-\mu_i(y,\cdot))^+(E))。$$

令 $E_i^+(x,y)$、$E^+(x,y)$ ($E_i^-(x,y)$、$E^-(x,y)$) 分别为 $\mu_i(x,\cdot)-\mu_i(y,\cdot)$ 和 $\mu(x,\cdot)-\mu(y,\cdot)$ 的正（负）集合，则

$$
\begin{aligned}
&(\mu(x,\cdot)-\mu(y,\cdot))^+(E)=(\mu(x,\cdot)-\mu(y,\cdot))(E^+(x,y))\\
&=\int_E(\mu_1(x,dz)-\mu_1(y,dz))\mu_2(z,E^+(x,y))\\
&\leqslant\int_E(\mu_1(x,dz)-\mu_1(y,dz))^+\sup_{z\in E}\mu_2(z,E^+(x,y))\\
&\quad-\int_E(\mu_1(x,dz)-\mu_1(y,dz))^-\inf_{z\in E}\mu_2(z,E^+(x,y))\\
&=(\mu_1(x,\cdot)-\mu_1(y,\cdot))^+(E)\\
&\quad\cdot[\sup_{z\in E}\mu_2(z,E^+(x,y))-\inf_{z\in E}\mu_2(z,E^+(x,y))]\\
&\leqslant(\mu_1(x,\cdot)-\mu_1(y,\cdot))^+(E)\sup_{u,v\in E}(\mu_2(u,\cdot)-\mu_2(v,\cdot))^+(E).
\end{aligned}
$$

把上式两边对 $x,y\in E$ 取 sup，得到

$$\delta(\mu)\leqslant\delta(\mu_1)\delta(\mu_2).$$

命题10.4. 设 $\mu_i\in\tilde{\mathscr{A}}$，$(i=1,2)$，$\mu_1(x,E)\equiv c$，$\mu_2(x,E)\equiv 0$，$\mu=\mu_2\otimes\mu_1$，则

$$\|\mu\|\leqslant\delta(\mu_1)\|\mu_2\|.$$

证： 令 $E^+(x)$ 表 $\mu(x,\cdot)$ 之正集合。因为 $\mu_2(x,E)\equiv 0$，所以 $\mu_2^+(x,E)\equiv\mu_2^-(x,E)$。但是 $\mu(x,E)=(\mu_2\otimes\mu_1)(x,E)\equiv 0$，所以

$$
\begin{aligned}
\|\mu\|&=2\sup_{x\in E}\mu^+(x,E)\\
&=2\sup_{x\in E}\int_E\mu_2(x,dy)\mu_1(y,E^+(x))\\
&\leqslant 2\sup_{x\in E}\Big[\int_E\mu_2^+(x,dy)\sup_{y\in E}\mu_1(y,E^+(x))\\
&\qquad-\int_E\mu_2^-(x,dy)\inf_{y\in E}\mu_1(y,E^+(x))\Big]
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 2\sup_{x\in E}\Big[\mu_2^+(x,E)\sup_{\mu,\nu\in E}(\mu_1(\mu,E^+(x))-\mu_1(\nu,E^+(x)))\Big]$$

$$\leqslant 2\sup_{x\in E}(\mu_2^+(x,E)\sup_{\mu,\nu\in E}([\mu_1(\mu,\cdot)-\mu_1(\nu,\cdot)]^+(E))$$

$$=\delta(\mu_1)\|\mu_2\|.$$

命题10.5. 设$\mu\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$\mu(x,E)\equiv c$，则

$$\lim_{n\to\infty}[\delta(\mu^n)]^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\geqslant 1}[\delta(\mu^n)]^{\frac{1}{n}}.$$

证： 由命题10.3有

$$\delta(\mu^{l+m})\leqslant\delta(\mu^l)\delta(\mu^m).$$

令

$$\rho=\inf_{n\geqslant 1}[\delta(\mu^n)]^{\frac{1}{n}},$$

对任何 $\varepsilon>0$，取m，使

$$[\delta(\mu^m)]^{\frac{1}{m}}<\rho+\varepsilon.$$

对任意正整数n，表$n=pm+q$，（$p\geqslant 0$，$0\leqslant q<m$），则有

$$[\delta(\mu^n)]^{\frac{1}{n}}\leqslant(\delta(\mu^m))^{\frac{p}{n}}\delta(\mu)^{\frac{q}{n}}$$

$$\leqslant(\rho+\varepsilon)^{\frac{mp}{n}}\delta(\mu)^{\frac{q}{n}}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{mp}{n}=1,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{q}{n}=0,$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}[\delta(\mu^n)]^{\frac{1}{n}}\leqslant\rho+\varepsilon.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}[\rho(\mu^n)]^{\frac{1}{n}}=\inf_{n\geqslant 1}[\delta(\mu^n)]^{\frac{1}{n}}.$$

命题10.6. 设μ，$p\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$p(x,E)\equiv\mu(x,E)\equiv c$（对一切$x\in E$），$\mu\otimes p=p\otimes\mu=\mu^2=\mu$，$\mu(x,A)\equiv\mu(A)$ 不依赖 $x\in E$，（$A\in\varepsilon$），则

(1) $\delta(p)\leqslant\|p-\mu\|$;

(2) $r(p-\mu)=\lim\limits_{n\to\infty}\delta(p^n)^{\frac{1}{n}}=\inf\limits_{n\geqslant 1}\delta(p^n)^{\frac{1}{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}r(p^n-\mu)=0\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\delta(p^n)=0$

$\Longleftrightarrow$存在N，使$\delta(p^N)<1$

$\Longleftrightarrow r(p-\mu)<1$。

证：(1) $\delta(p)=\frac{1}{2}\sup\limits_{x,y\in E}\|p(x,\cdot)-p(y,\cdot)\|$

$\leqslant\frac{1}{2}\sup\limits_{x,y\in E}(\|p(x,\cdot)-\mu(x,\cdot)\|+\|\mu(y,\cdot)-p(y,\cdot)\|)$

$=\|p-\mu\|$。

(2) $r(p-\mu)=\lim\limits_{n\to\infty}\|(p-\mu)^n\|^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\|p^n-\mu\|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\|p^n-\mu\otimes p^n\|^{\frac{1}{n}}$

(命题10.4)

$\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}(\|I-\mu\|\ \delta(p^n))^{\frac{1}{n}}$

$\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\delta(p^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}\delta(p)^{n\frac{1}{n}}$

$\leqslant\limsup\limits_{n\to\infty}\|p^n-\mu\|^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\|(p-\mu)^n\|^{\frac{1}{n}})=r(p-\mu)$。

定义10.5。对任意$\mu\in\tilde{\mathscr{A}}$，定义

$(\mu f)(x)=\int_E\mu(x,dy)f(y)$，$(f\in\mathscr{M},\ x\in E)$，

$\sigma_\pi(\mu)=\left\{\lambda:\ \lambda\in\mathscr{K},\ \begin{array}{l}\text{存在 } f_n\in\mathscr{M},\ \|f_n\|=1,\ \text{且}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\|(-\mu+\lambda I)f_n\|=0。\end{array}\right\}$，

$\sigma_\pi(\mu)$称为μ的渐近点谱。

容易证明：

(1) $\sigma_\pi(\mu)\subset\sigma(\mu)$； (10.6)

(2) $\sigma(\mu)^b\subset\sigma_\pi(\mu)$，($\sigma(\mu)^b$ 为 $\sigma(\mu)$ 之边界)。 (10.7)

证：(1) 谬设存在 $\lambda\in\sigma_\pi(\mu)$，$\lambda\overline{\in}\sigma(\mu)$，则存在 $f_n\in\mathscr{M}$，$\|f_n\|=1$，$\nu_\lambda\in\widetilde{\mathscr{A}}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|(\lambda I-\mu)f_n\|=0,$$

但是

$$\nu_\lambda(\lambda I-\mu)=I,$$

所以

$$1=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=\lim_{n\to\infty}\|\nu_\lambda(\lambda I-\mu)f_n\|$$
$$\leqslant\|\nu_\lambda\|\lim_{n\to\infty}\|(\lambda I-\mu)f_n\|=0,$$

矛盾。

(2) 首先我们注意：对任一 Banach 代数 $\mathscr{A}$，任取 $\mu\in\mathscr{A}$，再设 e 为其单位元素，若 $\|\mu-e\|<1$，则 μ 必为正则元素，且 $\mu^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(e-\mu)^k$。

事实上，令

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{n}(e-\mu)^k,$$

则当 $m<n$ 时

$$\|\mu_n-\mu_m\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|(e-\mu)^k\|$$

$\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|(e-\mu)\|^k\longrightarrow 0$，(当 $m\to\infty$)。此即 $\{\mu_n,\ n\geqslant 0\}$ 是基本列，由于 $\mathscr{A}$ 是 Banach 空间，由完备性得知存在 $\nu\in\mathscr{A}$，使

$$\mu_n \longrightarrow \nu = \sum_{k=0}^{\infty}(e-\mu)^k, \qquad (n\to\infty).$$

但是

$$\mu\mu_n = (e-(e-\mu))\sum_{k=0}^{n}(e-\mu)^k$$

$$= (e-(e-\mu)^{n+1}),$$

所以

$$\|\mu\mu_n - e\| \leqslant \|(e-\mu)^{n+1}\| \leqslant \|e-\mu\|^{n+1} \longrightarrow 0, \ (n\to\infty),$$

即是

$$\mu\mu_n \longrightarrow e.$$

仿之可证

$$\mu_n\mu \longrightarrow e.$$

而由 *Banach* 代数的范数乘法不等式及 $\mu_n \to \nu$ 知

$$\mu_n\mu \longrightarrow \nu\mu;$$

$$\mu\mu_n \longrightarrow \mu\nu,$$

所以

$$\mu\nu = \nu\mu = e,$$

此即 μ 是正则元素。

现在我们利用此事实来证明 $\sigma(\mu)^b \subset \sigma_*(\mu)$。任取 $\lambda \in \sigma(\mu)^b$，则存在 $\lambda_n \overline{\in} \sigma(\mu)$，$|\lambda_n - \lambda| \downarrow 0$。

令 $\nu_n = \lambda_n I - \mu, \nu = \lambda I - \mu$，则由 $\lambda_n \overline{\in} \sigma(\mu)$ 知 ν_n 有逆元素 ν_n^{-1}。往证

$$\|\nu_n^{-1} \otimes \nu - I\| \geqslant 1, \ (\text{对一切} n \geqslant 1).$$

谬设有 k_m 使：

$$\|\nu_{k_m}^{-1} \otimes \nu - I\| < 1,$$

所以 $\nu_{k_m}^{-1} \otimes \nu$ 有逆元素 ν_m^*，从而

$$\nu_m^* \otimes (\nu_{k_m}^{-1} \otimes \nu) = I,$$

$$(\nu_{k_m}^{-1}\otimes\nu)\otimes\nu_m^* = I,$$

把第二式左乘ν_{k_m}，右乘$\nu_{k_m}^{-1}$得：

$$\nu\otimes(\nu_m^*\otimes\nu_{k_m}^{-1}) = I,$$

此即：

ν是正则元素，矛盾。

所以

$$\|\nu_n^{-1}\otimes\nu - I\|\geqslant 1,（对一切n\geqslant 1）。$$

所以，若令

$$g_n = \frac{|\lambda-\lambda_n|}{\|\nu_n^{-1}\otimes\nu - I\|},\quad f_n = \nu_n^{-1}g_n,$$

则

$$\|\nu_n^{-1}g_n\| = \frac{\|\nu_n^{-1}(\lambda-\lambda_n)\|}{\|\nu_n^{-1}\otimes\nu - I\|} = \frac{\|\nu_n^{-1}((\lambda I-\mu)-(\lambda_n I-\mu))\|}{\|\nu_n^{-1}\otimes\nu - I\|}$$

$$= \frac{\|\nu_n^{-1}\otimes\nu - I\|}{\|\nu_n^{-1}\otimes\nu - I\|} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n\| = 0.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\|(\lambda I-\mu)f_n\| = \lim_{n\to\infty}\|(\lambda_n I-\mu)f_n\|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\|\nu_n\otimes\nu_n^{-1}g_n\| = \lim_{n\to\infty}\|g_n\| = 0.$$

所以

$$\lambda\in\sigma_\pi(\mu).$$

命题10.7 设$P,\ \mu\in\widetilde{\mathscr{A}},\mu(x,A)=\mu(A),P\otimes\mu=\mu\otimes P=\mu^2=\mu$，则

(1) $\sigma_\pi(P-\mu)-\{0,1\}=\sigma_\pi(P)-\{0,1\}$；

(2) $r(P-\mu)<1\Longrightarrow r^*(P)=r(P-\mu)$，

其中

$$r^*(P)=\sup\{|\lambda|:\lambda\neq 1,\ \lambda\in\sigma(P)\}.$$

证：(1) 设$\alpha\in\sigma_\pi(P)$，$\alpha\neq 1$，则存在$f_n\in\mathscr{M}$，$\|f_n\|=1$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|(P-\alpha I)f_n\|=0,$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu f_n\|=\lim_{n\to\infty}\|\mu\otimes(P-\alpha I)f_n\|\frac{1}{|1-\alpha|}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\|\mu\|\|(P-\alpha I)f_n\|\frac{1}{|1-\alpha|}=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\|(P-\alpha I-\mu)f_n\|=0,$$

从而

$$\alpha\in\sigma_\pi(P-\mu).$$

反之，若$\alpha\in\sigma_\pi(P-\mu)$，$\alpha\neq 0$，则存在$f_n\in\mathscr{M}$，$\|f_n\|=1$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|(P-\mu-\alpha I)f_n\|=0, \tag{10.8}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu\otimes(P-\mu-\alpha I)f_n\|=0. \tag{10.9}$$

由上式，并利用$\mu\otimes P=\mu^2$得：

$$\lim_{n\to\infty}\|\alpha\mu f_n\|=0.$$

而$\alpha\neq 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu f_n\|=0, \tag{10.10}$$

从而由(10.10)、(10.8)得：

$$\lim_{n\to\infty}\|(P-\alpha I)f_n\|=0,$$

而$\|f_n\|=1$，所以$\alpha\in\sigma_\pi(P)$。(1) 证毕。

(2) 设$r(P-\mu)<1$，则$1\overline{\in}\sigma(P-\mu)$。故由(10.6)得$1\overline{\in}\sigma_\pi(P-\mu)$。由(1)及(10.6)、(10.7)得：

$$r(P-\mu)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(P-\mu)\}$$

$= \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma_\pi(P-\mu)\}$
$= \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma_x(P-\mu), \lambda \neq 1, \lambda \neq 0\}$
$= \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma_\pi(P), \lambda \neq 1, \lambda \neq 0\}$
$= \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(P),\ \lambda \neq 1, \lambda \neq 0\}$
$= r^*(P)$。

定义10.6 称转移函数$P(s,t,x,A)(-\infty<s\leqslant t<\infty,\ x\in E,\ A\in\mathscr{E})$属于$\mathscr{G}^+$（对应地，$\mathscr{G}^-$），如果对任何$s\in R^1$，存在$\mu_s\in\mathscr{L}^+$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu_s(E)\equiv 1$，使$\lim\limits_{s\to\infty}\|\mu_s-\mu\|=0$，且

$$\int_E \mu_s(dx)P(u,s,x,A)=\mu_u(A),\ (-\infty<u\leqslant s, A\in\mathscr{E}),\tag{10.11}$$

（对应地，$\lim\limits_{s\to-\infty}\|\mu_s-\mu\|=0$，且

$$\int_E \mu_s(dx)P(s,t,x,A)=\mu_t(A),$$
$$(s\leqslant t<\infty, A\in\mathscr{E}),\tag{10.11$'$}$$

）称$P(s,t,x,A)$属于$\mathscr{G}$，如果对任何$s\in R^1$，存在$\mu_s\in\mathscr{L}^+$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu_s(E)\equiv 1$，使$\lim\limits_{|s|\to\infty}\|\mu_s-\mu\|=0$，且

$$\int_E \mu_s(dx)P(s,t,x,A)=\int_E \mu_u(dx)P(u,s,x,\ A)=\mu_t(A),\tag{10.12}$$

$(-\infty<u\leqslant s\leqslant t<\infty, A\in\mathscr{E})$。称$\mu$为$P(s,t,x,\ A)$的伴随测度。

定义10.7 称转移函数$P(s,t,x,A)$有非常返集B，如果$P(s,\cdot,x,A)$、$P(\cdot,t,x,A)$皆为 Borel 可测函数，且

$$\int_0^\infty P(t-s,t,x,B)\,ds<\infty,\int_0^\infty P(t,t+s,x,B)ds<\infty,$$

$(t\in(-\infty,\infty), x\in E)$。

称$P(s,t,x,A)$是弱遍历的（对应地，右弱遍历的），如果存

在$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu(E)=1$，使

$$\lim_{t\to\infty}P(s,t,x,A)=\lim_{s\to-\infty}P(s,t,x,A)=\mu(A),\tag{10.13}$$

（对应地，

$$\lim_{t\to\infty}P(s,t,x,A)=\mu(A),\tag{10.13$'$}$$）

称μ为其遍历极限。

称$P(s,t,x,A)$是强遍历的（对应地，右强遍历的），如果存在$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu(E)=1$，使

$$\lim_{t\to\infty}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=\lim_{s\to-\infty}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=0,\tag{10.14}$$

（对应地，

$$\lim_{t\to\infty}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=0,\tag{10.14$'$}$$）

称μ为其遍历极限。

称$P(s,t,x,A)$是一致强遍历的（对应地，一致右强遍历的），如果存在$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu(E)=1$，使

$$\lim_{|s-t|\to\infty}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=0,\tag{10.15}$$

（对应地，使

$$\lim_{\substack{|s-t|\to\infty\\ s\geq b}}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=0,\ \text{对一切实数}b,\tag{10.15$'$}$$）

称μ为其遍历极限。

定理10.1 设转移函数$P(s,t,x,A)$属于$\mathscr{G}$，μ是其伴随测度，则下列陈述等价：

（1）存在$M(t)$和$N(s)$及$\alpha<1$，使得对一切$t\geq N(s)$或者$s\leq M(t)$有：

$$\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))\leq\alpha<1;$$

(2) $\lim_{t\to\infty}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=\lim_{s\to-\infty}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=0$;

(3) $P(s,t,x,A)$是强遍历的；

(4) 存在$A\in\mathscr{E}$，使$\mu(A)>0$，而且

$$\lim_{s\to-\infty}\sup_{x\in E}(|P(s,t,x,\cdot)-\mu(\cdot)|(A))$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in E}(|P(s,t,x,\cdot)-\mu(\cdot)|(A))=0.$$

证：(1)$\Longrightarrow$(2)．设(1)成立．可以假定$N(s)\geqslant s+1$，$M(t)\leqslant t-1$．令

$$N(s)^{k*}=\overbrace{N(N(\cdots N}^{k个}(s)\cdots))$$

表$N(s)$的k重复合函数，则由命题10.3有

$$\delta(P(s,N(s)^{k*},\cdot,\cdot))$$

$$\leqslant\delta(P(s,N(s),\cdot,\cdot))\delta(P(N(s),N(N(s)),\cdot,\cdot))$$

$$\cdots\delta(P(N(s)^{(k-1)*},N(s)^{k*},\cdot,\cdot))\leqslant\alpha^k,$$

因此，

$$\lim_{k\to\infty}\delta(P(s,N(s)^{k*},\cdot,\cdot))=0.$$

但是

$$N(s)^{k*}\geqslant k+s\to\infty\quad(当k\to\infty),$$

$$\delta(P(s,t+\varepsilon,\cdot,\cdot))\leqslant\delta(P(s,t,\cdot,\cdot)),\quad(\varepsilon>0),$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=0.$$

仿之可证：

$$\lim_{s\to-\infty}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=0.$$

(1)$\Longrightarrow$(2)获证．

(2)$\Longrightarrow$(3)．设(2)成立．令$\tau>0$，则

$$\|P(s,s+\tau,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|$$

$$\leqslant\|P(s,s+\tau,\cdot,\cdot)-\mu_{s+\tau}(\cdot)\|+\|\mu_{s+\tau}(\cdot)-\mu(\cdot)\|$$

$$\leqslant\|P(s,s+\tau,\cdot,\cdot)-\mu_{s+\tau}\otimes P(s,s+\tau,\cdot,\cdot)\|$$
$$+\|\mu_{s+\tau}(\cdot)-\mu(\cdot)\|$$
$$\leqslant\|I-\mu_{s+\tau}\|\delta(P(s,s+\tau,\cdot,\cdot))+\|\mu_{s+\tau}-\mu\|.$$

令$\tau\to\infty$，并注意(2)成立及

$$\lim_{s\to\infty}\|\mu_s-\mu\|=0$$

即得：

$$\lim_{t\to\infty}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=0.$$

仿之可证：

$$\lim_{s\to-\infty}\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|=0.$$

(3)$\Longrightarrow$(4)。这是显然的。

(4)$\Longrightarrow$(1)。设(4) 成立．我们可以选取$N=N(s)$，使

$$P(s,N(s),x,A)>\frac{1}{2}\mu(A)>0,(\text{对一切}x\in E).$$

$$|P(s,N(s),x,\cdot)-P(s,N(s),y,\cdot)|(A)<\frac{1}{2}\mu(A),$$

(对一切x，$y\in E$)。所以

$$\delta(P(s,N(s),\cdot,\cdot))$$
$$=\frac{1}{2}\sup_{x,y\in E}\|P(s,N(s),x,\cdot)-P(s,N(s),y,\cdot)\|$$
$$=\frac{1}{2}\sup_{x,y\in E}[|P(s,N(s),x,\cdot)-P(s,N(s),y,\cdot)|(E-A)$$
$$+|P(s,N(s),x,\cdot)-P(s,N(s),y,\cdot)|(A)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{x,y\in E}[P(s,N(s),x,E-A)+P(s,N(s),y,E-A)$$
$$+|P(s,N(s),x,\cdot)-P(s,N(s),y,\cdot)|(A)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{x,y\in E}[2-P(s,N(s),x,A)-P(s,N(s),y,A)$$
$$+|P(s,N(s),x,\cdot)-P(s,N(s),y,\cdot)|(A)]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sup_{x,y\in E}\left[2-\mu(A)+\frac{1}{2}\mu(A)\right]<1.$$

若注意命题10.3及转移函数的$(K-C)$方程式，则定理得证。

附注1：若E是可数集，则(4)化为：存在$z\in E$，使$\mu(\{z\})>0$，而且

$$\lim_{s\to-\infty}\sup_{x\in E}|P(s,t,x,\{z\})-\mu(\{z\})|$$
$$=\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in E}|P(s,t,x,\{z\})-\mu(\{z\})|=0.$$

附注2：若转移函数$P(s,t,x,A)$是弱遍历的，则它属于$\mathscr{G}$。

由第一编引理7.3可得附注2。

定理10.2 在定理10.1的条件下，下列陈述等价：

(1) 存在$M>0$及$\alpha<1$，使得：

"$|s-t|\geqslant M\Longrightarrow\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))\leqslant\alpha<1$"；

(2) $\lim\limits_{|s-t|\to\infty}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=0$；

(3) $P(s,t,x,A)$是一致强遍历的；

(4) 存在$A\in\mathscr{E}$，使$\mu(A)>0$，而且

$$\lim_{|s-t|\to\infty}\sup_{x\in E}(|P(s,t,x,\cdot)-\mu(\cdot)|(A))=0.$$

证：仿定理10.1可证：

$$(1)\Longrightarrow(2),\quad(3)\Longrightarrow(4)\Longrightarrow(1).$$

所以为证定理10.2，只须证(2)$\Longrightarrow$(3)。设(2)成立。令

$$\tau(s,t)=\begin{cases}t, & 当|t|>|s|;\\ s, & 反之,\end{cases}$$

则有

$$|\tau(s,t)|=|s|\vee|t|,$$
$$\mu_{\tau(s,t)}\otimes P(s,t,\cdot,\cdot)=\mu_{\tau(s,t)},$$

而且

$$|s-t|\to\infty\Longrightarrow|\tau(s,t)|\to\infty\Longrightarrow\|\mu_{\tau(s,t)}-\mu\|\to0.$$

但是

$$
\begin{aligned}
&\|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu\| \\
&\leqslant \|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu_{\tau(s,t)}\| + \|\mu_{\tau(s,t)}-\mu\| \\
&= \|P(s,t,\cdot,\cdot)-\mu_{\tau(s,t)}\otimes P(s,t,\cdot,\cdot)\| + \|\mu_{\tau(s,t)}-\mu\| \\
&\leqslant 2\delta(P(s,t,\cdot,\cdot)) + \|\mu_{\tau(s,t)}-\mu\|.
\end{aligned}
$$

令$\tau\to\infty$，由(2)得(3)。

定理10.3 设转移函数 $P(s,t,x,A)$ 属于$\mathscr{G}^{+}$，μ为其伴随测度，则下列陈述等价：

(1) 存在$N(s)$及$a<1$，使得：

"$t\geqslant N(s)\Longrightarrow\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))\leqslant a<1$"；

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=0$；

(3) $P(s,t,x,A)$是右强遍历的；

(4) 存在$A\in\mathscr{E}$，使$\mu(A)>0$，而且

$\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x\in E}(|P(s,t,x,\cdot)-\mu(\cdot)|(A))=0$。

证：仿定理10.1可证定理10.3。

定理10.4 在定理10.3的条件下，下列陈述等价：

(1) 对任何实数b，存在$M=M(b)>0$及$a<1$，使得

"$|s-t|\geqslant M,\ s\geqslant b\Longrightarrow\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))\leqslant a<1$"；

(2) $\lim\limits_{\substack{|s-t|\to\infty\\ s\geqslant b}}\delta(P(s,t,\cdot,\cdot))=0$,(对一切实数$b$)；

(3) $P(s,t,x,A)$是右一致强遍历的；

(4) 存在$A\in\mathscr{E}$，$\mu(A)>0$，而且

$\lim\limits_{\substack{|s-t|\to\infty\\ s\geqslant b}}\sup\limits_{x\in E}(|P(s,t,x,\cdot)-\mu(\cdot)|(A))=0$,

(对一切实数b)。

证：仿定理10.2可证定理10.4。

下面我们研究时齐的情况．设$P(t,x,A)$ ($t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\mathscr{E}$)是时齐的转移函数．称$P(t,x,A)$属于$\mathscr{G}^{h}$，如果对每一个$t\geqslant 0$，存在$\mu_t\in\mathscr{L}^{+}$，使$\mu_t(E)\equiv 1$，$\lim\limits_{t\to\infty}\|\mu_t-\mu\|=0$，$\mu\in\mathscr{L}^{+}$，

$\int_E \mu_t(dx)P(s,x,A)=\mu_t(A)$，$(s\geqslant 0,\ t\geqslant 0,\ A\in\mathscr{E})$。这时称 μ 是 $P(t,x,A)$ 的伴随测度。

定理10.5 设 $P(t,x,A)$ 属于 $\mathscr{G}^h$，μ 为其伴随测度，则下列陈述等价：

(1) 存在 $M>0$，使得
"$t\geqslant M\Longrightarrow\delta(P(t,\cdot,\cdot))\leqslant\alpha<1$"；

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}\delta(P(t,\cdot,\cdot))=0$；

(3) $P(t,x,A)$ 是(右)强遍历的；

(4) 存在 $A\in\mathscr{E}$，使 $\mu(A)>0$，而且
$\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x\in E}(|P(t,x,\cdot)-\mu(\cdot)|(A))=0$；

(5) $r(P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))<1$，(对一切 $t>0$)。

证：应用定理10.3，为证本定理，只须证明(1)$\Longleftrightarrow$(5)。而这，可由命题10.6立即可得。

§11 遍历极限的收敛速度

沿用§10的符号。

定理11.1 设转移函数 $P(s,\ t,\ x,A)$ 属于 $\mathscr{G}^+$ 且是右一致强遍历的，μ 是其遍历极限，则对任何实数 b，存在 $\lambda=\lambda(b)>0,k>0$，使

$$\|P(s,\ t,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot)\|\leqslant ke^{-(t-s)\lambda},\quad (b\leqslant s\leqslant t).$$

证：因为 $P(s,\ t,\ x,A)$ 属于 $\mathscr{G}^+$ 且是右一致强遍历的，应用定理10.4和命题10.3及第一编引理7.3可得：

$$\begin{aligned}
&\|P(s,\ t,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot)\|\\
&=\|P(s,t,\cdot,\ \cdot)\otimes(I(\cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot))\|\\
&\leqslant\delta(P(s,\ t,\ \cdot,\ \cdot))\delta(I(\cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot))\\
&\leqslant 2\delta(P(s,\ t,\ \cdot,\ \cdot))
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\prod_{i=0}^{\left[\frac{t-s}{M}\right]-1}\delta(P(s+iM,\ s+(i+1)M,\ \cdot,\ \cdot))$$

$$\leqslant 2\alpha^{\left[\frac{t-s}{M}\right]}\leqslant 2\alpha^{\left(\frac{t-s}{M}-1\right)},\quad (b\leqslant s\leqslant t),$$

其中α和 $M=M(b)$ 如定理10.4所定义，$[a]$ 表不大于a的最大整数。取 $\lambda=\log\alpha^{-\frac{1}{M}}$，$k=\frac{2}{\alpha}$即可。

定理11.2 设转移函数$P(s,\ t,\ x,A)$ 是一致强遍历的，μ是其遍历极限，则存在$\lambda>0$，$k>0$（均不依赖s，t），使

$$\|P(s,\ t,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot)\|\leqslant ke^{-(t-s)\lambda},$$

$$(-\infty<s\leqslant t<\infty).$$

证： 仿定理11.1，只不过在应用定理10.4的地方改为应用定理10.2。注意：$P(s,\ t,\ x,\ A)$ 是一致强遍历的，故$P(s,\ t,\ x,\ A)$ 必属于$\mathscr{G}$，从而定理10.2的条件满足。

定理11.3 设时齐的转移函数$P(t,\ x,\ A)$ 是强遍历的，而且满足：

$$\lim_{t\to 0+}\sup_{x\in E}|P(t,\ x,\ A)-I_A(x)|=0, \tag{11.1}$$

则

$$\delta(P(t,\ \cdot,\ \cdot))=e^{-\lambda t},\ (t>0)$$

的充要条件是：

$$\delta(P(t,\ \cdot,\ \cdot))=r(P(t,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot)),\ (t>0), \tag{11.2}$$

其中$\lambda>0$，μ是$P(t,\ x,\ A)$ 的遍历极限。

注意：由于$P(t,\ x,\ A)$ 是强遍历的，所以 $P(t,\ x,\ A)$ 属于$\mathscr{G}^h$，因此，由定理10.5知：

$r(P(t,\cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot))<1$。此处$\lambda=-\log[r(P(1,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))]$。

证： 由 (11.1) 有

$$\lim_{t\to s}\sup_{x\in E, A\in \mathscr{E}}|P(t, x, A)-P(s, x, A)|=0. \tag{11.3}$$

令$E^+_{s,t,x}$、$E^-_{s,t,x}$分别为$(P(s, x, \cdot)-P(t, x, \cdot))$的正、负集，则

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to s}\|P(t, \cdot, \cdot)-P(s, \cdot, \cdot)\| \\
&=\lim_{t\to s}\sup_{x\in E}\|P(t, x, \cdot)-P(s, x, \cdot)\| \\
&=\lim_{t\to s}\sup_{x\in E}[(P(t, x, E^+_{s,t;x})-P(s, x, E^+_{s,t;x})) \\
&\quad -(P(t, x, E^-_{s,t;x})-P(s, x, E^-_{s,t,x}))] \\
&=0.
\end{aligned}$$

因此，$r(P(t, \cdot, \cdot)-\mu(\cdot))$ 是t的连续函数（参见[24]p.36）。应用命题10.2及$P(t, \cdot, \cdot)\otimes\mu(\cdot)=\mu(\cdot)\otimes P(t,\cdot, \cdot)=\mu(\cdot)\otimes\mu(\cdot)=\mu(\cdot)$有：

$$\begin{aligned}
&r(P(t, \cdot, \cdot)-\mu(\cdot)) \\
&=[r(P(1, \cdot, \cdot)-\mu(\cdot))]^t. \qquad (t>0).
\end{aligned}$$

设

$$\delta(P(t,\cdot, \cdot))=e^{-\lambda t}, \ (\lambda>0, \ t\geqslant 0),$$

因为命题10.6

$$\begin{aligned}
&r(P(1, \cdot, \cdot)-\mu(\cdot)) \\
&=\lim_{n\to\infty}(\delta(P(n, \cdot, \cdot)))^{\frac{1}{n}}=e^{-\lambda},
\end{aligned}$$

所以

$$r(P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))=e^{-\lambda t}=\delta(P(t,\cdot, \cdot)), \ (t>0).$$

反之，设

$$\delta(P(t, \cdot, \cdot))=r(P(t, \cdot, \cdot)-\mu(\cdot)),$$

令

$$\lambda=-\log(r(P(1, \cdot, \cdot)-\mu(\cdot))),$$

则有

$$\delta(P(t,\cdot,\cdot))=r(P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))$$
$$=(r(P(1,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)))^{t}=e^{-\lambda t}.$$

定理11.4 设$P(t, x, A)$是时齐的强遍历的转移函数，μ是其遍历极限，则

$$\|P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|\leqslant ke^{-\lambda t},\quad (t>0),$$

其中$k>0$，$\lambda>0$不依赖于t，$\lambda\leqslant\lambda^{*}=-\log(r^{*}(P(1,\cdot,\cdot)))$.

这就是说，$\|P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|$以指数速度收敛，但其指数$\lambda\leqslant\lambda^{*}$。当(11.1)成立时，且$\delta(P(s+t,\cdot,\cdot))=\delta(P(s,\cdot,\cdot))\cdot\delta(P(t,\cdot,\cdot))$时，则收敛速度是最佳的，即是$\lambda=\lambda^{*}$。

证：由定理11.2，有

$$\|P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|\leqslant ke^{-\lambda t},\quad (k>0,\ \lambda>0,\ \text{不依赖}\ t>0).$$

又因为$P(t, x, A)$是强遍历的，由定理10.5，有

$$r(P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))<1,\quad (t>0).$$

因此，由命题10.7有

$$r(P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))=r^{*}(P(t,\cdot,\cdot)),\quad (t>0).$$

但是，由命题10.2得：

$$r(P(1,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot))=\inf_{n\geqslant 1}\|P(n,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|^{\frac{1}{n}},$$

所以

$$\|P(n,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|\geqslant r^{*}(P(1,\cdot,\cdot))^{n},\quad (n\geqslant 1).$$

在证明$\lambda\leqslant\lambda^{*}$中不妨设$r^{*}(P(1,\cdot,\cdot))>0$，否则$\lambda^{*}=+\infty$，$\lambda\leqslant\lambda^{*}$自然成立。反证法。若存在$\lambda\geqslant\lambda^{*}+\varepsilon=-\log(r^{*}(P(1,\cdot,\cdot)))+\varepsilon$，$(\varepsilon>0)$，使

$$\|P(t,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|\leqslant ke^{-\lambda t},\quad (t>0),$$

则

$$\|P(n,\cdot,\cdot)-\mu(\cdot)\|$$
$$\leqslant ke^{n\log(r^{*}(P(1,\cdot,\cdot)))-n\varepsilon}$$

$$<r^*(P(1,\ \cdot,\ \cdot))^n,\quad (\text{当}n\text{充分大}),$$

而这是不可能的，所以$\lambda\leqslant\lambda^*$。

如果（11.1）成立，而且

$$\delta(P(s+t,\ \cdot,\ \cdot))=\delta(P(s,\cdot,\cdot))\cdot\delta(P(t,\cdot,\cdot)),$$

则

$$\delta(P(t,\ \cdot,\ \cdot))=e^{-\lambda t}.$$

根据定理11.3有

$$\begin{aligned}e^{-\lambda t}&=r(P(t,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot))\\&=(r(P(1,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot)))^t\\&=(r^*(P(1,\ \cdot,\ \cdot)))^t=e^{-\lambda^* t}.\end{aligned}$$

所以$\lambda=\lambda^*$，

$$\begin{aligned}\|P(t,\ \cdot,\ \cdot)-\mu(\cdot)\|&\leqslant 2\delta(P(t,\ \cdot,\ \cdot))\\&\leqslant 2e^{-\lambda^* t}.\end{aligned}$$

定理证毕。

§12 q过程的遍历位势

在这一节中，我们将利用前两节的结果，证明在强遍历的条件下，q过程$P(t,\ x,A)$的遍历位势核的存在性及其性质。并用此来改善马尔可夫过程的 Riesz 分解定理，此外，还将讨论如何从q函数出发来寻找q过程的遍历极限（不通过q过程作中界）。

令$(E,\ \mathscr{E})$、$\mathscr{M}$、$\mathscr{L}$如§9所定义，$\widetilde{\mathscr{A}}$如（10.1）所定义的 Banach代数，$\mathscr{M}^+=\{f:f\geqslant 0,\ f\in\mathscr{M}\}$，$\mathscr{L}^+$、$\widetilde{\mathscr{A}}^+$类似。$\|\cdot\|$表$\widetilde{\mathscr{A}}$中的范数。

设$q(x)-q(x,\ A)$ $(x\in E,A\in\mathscr{E})$ 为q函数对，或者说$\tilde{q}(x,\ A)=q(x,\ A)-I_A(x)q(x)$ 为q函数（定义请见第二编定义1.1）。$\bar{P}(t,\ x,\ A)$ 为最小的q过程，（参见第二编定理1.1），$\bar{\Psi}(\lambda,x,\ A)$ 为$\bar{P}(t,\ x,\ A)$ 的拉氏变换。

条件（甲）：设$P(t, x, A)$是一个标准的转移函数，而且

$$\lim_{t\to\infty} p(t, x, A) = \Pi(x, A), \quad (x\in E, A\in \mathscr{E})$$

存在，$\Pi\in\widetilde{\mathscr{A}}$。

定义12.1 在条件（甲）下，称

$$Z(t, x, A) = p(t, x, A) - \Pi(x, A) \tag{12.1}$$

为$P(t, x, A)$的误差函数。

命题12.1 对于误差函数$Z(t, x, A)$，有：

(1) $Z(t, \cdot, \cdot)\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$(t\geqslant 0)$；

(2) $\lim\limits_{t\to 0+} Z(t, x, A) = Z(0, x, A) = I_A(x) - \Pi(x, A)$，$(x\in E, A\in\mathscr{E})$；

(3) $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t, x, A) = 0$，$(x\in E, A\in\mathscr{E})$；

(4) $\int_E Z(s,x,dy)Z(t, y,A) = Z(s+t, x, A)$，$(s, t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$；

(5) $$\int_E Z(t, x, dy)\Pi(y, A) = \int_E \Pi(x, dy)Z(t, y, A) = 0,$$

$(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$；

若$P(t, x, A)$还是q过程，则更有：

(6) $$\frac{d}{dt}p(t, x,A) = \frac{d}{dt}Z(t, x, A) = \int_E \tilde{q}(x,dy)Z(t,y, A) = \int_E \tilde{q}(x, dy)p(t, y, A),$$

$(t\geqslant 0, x\in E, A\in\mathscr{E})$；

(7) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{d}{dt}Z(t,x, A) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{d}{dt}p(t,x, A) = 0$，

$(x\in E, A\in\mathscr{E})$。

证：(1)—(3) 是明显的。(4) 和 (5) 可由$Z(t, x, A)$的定义及

$$\int_E P(t, x, dy)\Pi(y, A)=\int_E \Pi(x,dy)P(t, y, A)$$
$$=\int_E \Pi(x,dy)\Pi(y, A)$$
$$=\Pi(x, A)$$

得到。

(6) 可由

$$\int_E \tilde{q}(x, dy)\Pi(y, A)=\int_{E-\{x\}} \tilde{q}(x, dy)\Pi(y,A)$$
$$-q(x)\Pi(x, A)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\int_{E-\{x\}} \frac{P(t,x,dy)\Pi(y,A)}{t}$$
$$-q(x)\Pi(x, A)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left[\int_E P(t,x,dy)\Pi(y, A)\right.$$
$$\left.-\Pi(x, A)\right]=0$$

及

$$\frac{d}{dt}P(t,x,A)=\int_E \tilde{q}(x, dy)P(t, y, A)$$

得到。

(7) 可由 (3) 和 (6) 以及控制收敛定理得到。

定义12.2 在条件（甲）下，令

$$\Phi(\alpha,x,A)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}Z(t, x, A)dt \qquad (12.2)$$

($\alpha>0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$) 为误差函数$Z(t, x, A)$ 的拉氏变换。

命题12.2 若$P(t, x, A)$ 为一不断的q过程，则 $\Phi(\alpha, x, A)$ 恒满足：

(1) $\int_E \Phi(\alpha,x,dy)\Pi(y, A)=\int_E \Pi(x, dy)\Phi(\alpha, y, A)$

$=0$, ($\alpha>0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$);

(2) $\int_E \tilde{q}(x,dy)\Phi(\alpha,y, A)=\int_E \tilde{q}(x,dy)\Psi(\alpha, y, A)$,

($\alpha>0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $\Psi(\alpha, x,A)$ 为q过程$P(t, x, A)$ 的拉氏变换);

(3) $\int_E [\alpha I(x, dy)-\tilde{q}(x, dy)]\Phi(\alpha, y, A)$

$=I_A(x)-\Pi(x, A)$, $\qquad (\beta_\alpha^*)$

($\alpha>0$, $x\in E$, $A\in\mathscr{E}$, $I(x, A)=I_A(x)$ 是A 上的示性函数);

(4) $\Phi(\alpha,x,A)-\Phi(\beta,x,A)$

$=(\beta-\alpha)\int_E \Phi(\alpha,x,dy)\Phi(\beta,y,A)$, $\qquad (\mathrm{R}^*)$

($\alpha>0,\beta>0,x\in E,A\in\mathscr{E}$);

(5) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\|\alpha\mu\otimes\Phi(\alpha,\cdot,\cdot)-\mu\otimes Z(0,\cdot,\cdot)\|$

$=0$, (对一切$\mu\in\mathscr{L}$)。

证：由命题12.1 (5)可得(1)。由

$$\int_E \tilde{q}(x,dy)\Pi(y, A)=0 \qquad (12.3)$$

可得(2)。

由$\Psi(\alpha,x,A)$满足倒退方程式(B_α)(参见第二编命题1.1)及(12.3)可得(3)。

由$\Psi(\alpha,x,A)=\Phi(\alpha,x,A)+\dfrac{1}{\alpha}\Pi(x,A)$及$\Psi(\alpha,x,A)$满足预解方程式(参见第二编定理2.1)和本命题的(1)可得(4)。

最后证明(5)。因为由第一编定理5.1知：

$$\lim_{t\to 0+}P(t,x,A)=P(0,x,A)=I_A(x)$$

对$A\in\mathscr{E}$一致成立，所以，若令$E_{t,x}^+$、$E_{t,x}^-$分别为$Z(t,x,\cdot)-Z(0,$

$x,\cdot)$的正、负集，则有

$$\lim_{t\to 0+}\|Z(t,x,\cdot)-Z(0,x,\cdot)\|$$
$$=\lim_{t\to 0+}[(Z(t,x,E^+_{t,x})-Z(0,x,E^+_{t,x}))$$
$$-(Z(t,x,E^-_{t,x})-Z(0,x,E^-_{t,x}))]=0.$$

因此

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\|\alpha\mu\otimes\Phi(\alpha,\cdot,\cdot)-\mu\otimes Z(0,\cdot,\cdot)\|$$
$$\leqslant\limsup_{\alpha\to\infty}\int_E|\mu|(dx)\int_0^\infty dt[\alpha e^{-\alpha t}\|Z(t,x,\cdot)-Z(0,x,\cdot)\|]$$
$$=\limsup_{\alpha\to\infty}\int_E|\mu|(dx)\int_0^\infty ds\left[e^{-s}\left\|Z\left(\frac{s}{\alpha},x,\cdot\right)-Z(0,x,\cdot)\right\|\right]$$
$$=0.$$

定义12.3 在条件(甲)下，令

$$\Phi(x,A)=\int_0^\infty Z(t,x,A)dt,\quad(x\in E,\ A\in\mathscr{E}),\qquad(12.4)$$

称Φ为$P(t,x,A)$的遍历位势核。

命题12.3 在条件(甲)下，若$P(t,x,A)$是强遍历的，则遍历位势核$\Phi(x,A)$存在，且$\Phi\in\widetilde{\mathscr{A}}$，还有

$$\lim_{\alpha\to 0+}\|\Phi(\alpha,\cdot,\cdot)-\Phi(\cdot,\cdot)\|=0.$$

证：因为$P(t,x,A)$是强遍历的，所以，由定理11·4得知：存在$\lambda>0$，$k>0$，使

$$\|Z(t,\cdot,\cdot)\|\leqslant ke^{-\lambda t},\qquad(t\geqslant 0),$$

所以

$$\Phi(x,A)=\int_0^\infty Z(t,x,A)dt$$

存在．又因为对任何$A_n\in\mathscr{E}$，$A_n\cap A_m=\varnothing(n\neq m)$，有

$$\sum_{n=1}^\infty|Z(t,x,A_n)|\leqslant\|Z(t,x,\cdot)\|\leqslant\|Z(t,\cdot,\cdot)\|$$

$\leqslant ke^{-\lambda t}$,

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(x,A_n)=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Z(t,x,A_n)dt$$

$$=\int_0^{\infty}Z(t,x,\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)dt=\Phi(x,\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n),(x\in E).$$

显然，$\Phi(\cdot,A)\in\mathscr{M},(A\in\mathscr{E})$，所以$\Phi\in\widetilde{\mathscr{A}}$。而由

$$\|\Phi(\cdot,\cdot)-\Phi(\alpha,\cdot,\cdot)\|\leqslant\int_0^{\infty}\|(e^{-\alpha t}-1),Z(t,\cdot,\cdot)\|dt$$

$$\leqslant\int_0^{\infty}|e^{-\alpha t}-1|Ke^{-\lambda t}dt$$

可得

$$\lim_{\alpha\to 0}\|\Phi(\cdot,\cdot)-\Phi(\alpha,\cdot,\cdot)\|=0.$$

命题证毕。

对于遍历位势核$\Phi(x,A)$，我们定义二个算子如下：

$$(\Phi^*f)(x)=\int_E\Phi(x,dy)f(y),(f\in\mathscr{M},x\in E);$$

$$({}^*\Phi\mu)(A)=\int_E\mu(dx)\Phi(x,A),\ (\mu\in\mathscr{L}\subset\widetilde{\mathscr{A}},A\in\mathscr{E}).$$

显然，$\Phi^*({}^*\Phi)$是由$\mathscr{M}(\mathscr{L})$到$\mathscr{M}(\mathscr{L})$的有界线性算子。$\Phi^*f({}^*\Phi\mu)$称为$f(\mu)$的遍历位势。

对于q函数对$q(x)$—$q(x,A)$，令

$$\mathscr{L}_q=\{\mu:\mu\in\mathscr{L},\ \int_E|\mu|(dx)q(x)<\infty\},$$

$$\mathscr{L}_q^+=\{\mu:\mu\in\mathscr{L}_q,\ \mu\geqslant 0\}.$$

下面我们研究q过程的遍历极限的求法。

命题12.4 设$P(t,x,A)$是任一q过程，$\Psi(\alpha,x,A)$是其拉氏变换，且

$$\lim_{t\to\infty} p(t,x,A) = \lim_{\alpha\to 0+} \Psi(\alpha,x,A) = \Pi(x,A)$$

存在，$\Pi\in\widetilde{\mathscr{A}}$，则

(1) 对任何 $f\in\mathscr{M}$，只要$\int_E \Pi(x,dy)f(y)\equiv f(x)$，就有

$$\int_E \widetilde{q}(x,dy)f(y)\equiv 0,$$

更有

$$\int_E \widetilde{q}(x,dy)\Pi(y,A)\equiv 0.$$

(2) 若$\Psi(\alpha,x,A)$满足前进方程(F_α)，(定义可参见第二编命题1.2)则对任何$\mu\in\mathscr{L}_\alpha^+$，只要

$$\int_E \mu(dx)\Pi(x,A)\equiv\mu(A),$$

就有

$$\int_E \mu(dx)\widetilde{q}(x,A)\equiv 0,\qquad \int_E \Pi(x,dy)\widetilde{q}(y,A)\equiv 0.$$

证：(1)因为

$$f(x)=\int_E \Pi(x,dy)f(y)=\int_E P(t,x,dy)\int_E \Pi(y,dz)f(z)$$
$$=\int_E P(t,x,dy)f(y),$$

所以，取拉氏变换得：

$$f(x)=\alpha\int_E \Psi(\alpha,x,dy)f(y),\quad (\alpha>0).$$

但是，若简记$|\widetilde{q}(x,\cdot)|(dy)$为$|\widetilde{q}(x,dy)|$，则有

$$\int_E |\widetilde{q}(x,dy)|\left(\int_E \Psi(\alpha,y,dz)|f(z)|\right)$$
$$\leqslant\frac{2}{\alpha}q(x)\sup_{x\in E}|f(x)|<\infty,$$

所以，用Fubini定理及倒退方程式(B_α)得，

$$f(x)=\int_E\int_E(aI(x,dy)-\widetilde{q}(x,dy))\Psi(a,y,dz)f(z)$$

$$=\int_E(aI(x,dy)-\widetilde{q}(x,dy))\left(\int_E\Psi(a,y,dz)f(z)\right)$$

$$=\int_E(aI(x,dy)-\widetilde{q}(x,dy))\frac{1}{a}f(y)$$

$$=f(x)-\frac{1}{a}\int_E\widetilde{q}(x,dy)f(y),$$

因此

$$\int_E\widetilde{q}(x,dy)f(y)=0,\quad (x\in E).$$

(2) 因为

$$\mu(A)=\int_E\mu(dx)\Pi(x,A)=\int_E\mu(dx)P(t,x,A),$$

所以，取拉氏变换即得

$$\mu(A)=a\int_E\mu(dx)\Psi(a,x,A).$$

因此

$$\int_E\mu(dx)\int_E\Psi(a,x,dy)q(y)$$

$$=\frac{1}{a}\int_E\mu(dx)q(x)<\infty.$$

仿(1)，用 Fubini 定理及前进方程式(F_a)得：

$$\mu(A)=\int_E\mu(dx)\left(\int_E\Psi(a,x,dy)(aI_A(y)-\widetilde{q}(y,A))\right)$$

$$=\int_E\left(\int_E\mu(dx)\Psi(a,x,dy)\right)(aI_A(y)-\widetilde{q}(y,A))$$

$$=\mu(A)-\frac{1}{a}\int_E\mu(dx)\widetilde{q}(x,A).$$

所以

$$\int_E\mu(dx)\widetilde{q}(x,A)=0,\quad (A\in\mathscr{E}).$$

命题12.5 设$\Psi(a,x,A)$为任一q过程$p(t,x,A)$的拉氏变换，满足倒退方程式(B_a)及前进方程式(F_a)，且

$$\lim_{a\to 0+} a\Psi(a,x,A)=\Pi(x,A),\quad (x\in E, A\in \mathscr{E}),$$

$$\int_E \Psi(a,x,dy)q(y)<\infty,\quad \Pi\in \widetilde{\mathscr{A}},$$

则

(1) 对任何$f\in \mathscr{M}$，有：

$$\int_E \Pi(x,dy)f(y)\equiv f(x)\Longleftrightarrow \int_E \widetilde{q}(x,dy)f(y)\equiv 0.$$

(2) 对任何$\mu\in \mathscr{L}_q^+$，有：

$$\int_E \mu(dx)\Pi(x,A)\equiv \mu(A)\Longleftrightarrow \int_E \mu(dx)\widetilde{q}(x,A)\equiv 0.$$

证：(1)由命题12.4，只须证明

$$f\in \mathscr{M},\ \int_E \widetilde{q}(x,dy)f(y)\equiv 0\Rightarrow \int_E \Pi(x,dy)f(y)\equiv f(x).$$

事实上，由$f\in \mathscr{M}$，$\int_E \widetilde{q}(x,dy)f(y)\equiv 0$，及倒退方程式($B_a$)、前进方程式($F_a$)可得

$$\begin{aligned}\int_E \widetilde{q}(x,dy)\Psi(a,y,A)&=\int_E \Psi(a,x,dy)\widetilde{q}(y,A)\\&=a\Psi(a,x,A)-I_A(x).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=a\int_E \Psi(a,x,dy)f(y)\\&\quad-\int_E\left(\int_E \widetilde{q}(x,dy)\Psi(a,y,dz)\right)f(z)\\&=a\int_E \Psi(a,x,dy)f(y)\\&\quad-\int_E\left(\int_E \Psi(a,x,dy)\widetilde{q}(y,dz)\right)f(z).\end{aligned}$$

但是，

$$\int_E \Psi(\alpha,x,dy)\int_E |\widetilde{q}(y,dz)||f(z)|$$

$$\leqslant \sup_{x\in E}|f(x)|\cdot 2\int_E \Psi(\alpha,x,dy)q(y)<\infty,$$

因此，用 Fubini 定理得：

$$f(x)=\alpha\int_E \Psi(\alpha,x,dy)f(y)$$

$$-\int_E \Psi(\alpha,x,dy)\Big(\int_E \widetilde{q}(y,dz)f(z)\Big)$$

$$=\alpha\int_E \Psi(\alpha,x,dy)f(y).$$

令$\alpha\to 0+$得：

$$f(x)=\int_E \Pi(x,dy)f(y).$$

(2) 假定$\mu\in\mathscr{L}_e^+$，$\int_E \mu(dx)\widetilde{q}(x,A)\equiv 0$. 类似地有：

$$\mu(A)=\alpha\int_E \mu(dx)\Psi(\alpha,x,A)$$

$$-\int_E \mu(dx)\Big(\int_E \widetilde{q}(x,dy)\Psi(\alpha,y,A)\Big).$$

但是，

$$\int_E \mu(dx)\int_E |\widetilde{q}(x,dy)|\Psi(\alpha,y,A)$$

$$\leqslant \frac{2}{\alpha}\int_E \mu(dx)q(x)<\infty,$$

再用 Fubini 定理有

$$\mu(A)=\alpha\int_E \mu(dx)\Psi(\alpha,x,A)$$

$$-\int_E\Big(\int_E \mu(dx)\widetilde{q}(x,dy)\Big)\Psi(\alpha,y,A)$$

$$=\alpha\int_E \mu(dx)\Psi(\alpha,x,A).$$

令$\alpha \to 0+$得：

$$\mu(A)=\int_E \mu(dx)\Pi(x,A), \quad (A\in\mathscr{E}).$$

命题12.6 对任何q函数对$q(x)$—$q(x,A)$，令

$$\rho_\alpha^{(0)}(x,A)=I_A(x), \quad \rho_\alpha^{(1)}(x,A)=\frac{q(x,A)}{\alpha+q(x)},$$

$$\rho_\alpha^{(n+1)}(x, A)=\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\rho_\alpha^{(1)}(y, A), \quad (n\geqslant 1),$$

$(\alpha>0, x\in E, A\in\mathscr{E})$,

$$\psi_\alpha^{(0)}(x, A)=\frac{I_A(x)}{\alpha+q(x)}$$

$$\psi_\alpha^{(n)}(x, A)=\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\psi_\alpha^{(0)}(y, A), \quad (n\geqslant 1),$$

$(\alpha>0, x\in E, A\in\mathscr{E})$,

如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\frac{q(y)}{\alpha+q(y)}<\infty, \tag{12.5}$$

则有

(1) $\int_E \overline{\Psi}(\alpha, x, dy)q(y)<\infty$;

(2) $\overline{\Psi}(\alpha, x, A)$满足前进方程$(F_\alpha)$，其中$\overline{\Psi}(\alpha, x, A)$是最小$q$过程$\overline{P}(t, x, A)$的拉氏变换.

证：(1) 直接计算可知(参见第二编命题2.1)

$$\overline{\Psi}(\alpha, x, A)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_\alpha^{(n)}(x, A)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\frac{I_A(y)}{\alpha+q(y)},$$

所以

$$\int_E \overline{\Psi}(\alpha, x, dy)q(y)<\infty.$$

(2) $\int_E \overline{\Psi}(\alpha, x, dy)((\alpha+q(y))I_A(y))$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\frac{1}{\alpha+q(y)}((\alpha+q(y))I_A(y))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\rho_\alpha^{(n)}(x, A)$$

$$= I_A(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\frac{q(y, A)}{\alpha+q(y)}$$

$$= I_A(x)+\int_E \overline{\Psi}(\alpha, x, dy)q(y),$$

此即$\overline{\Psi}(\alpha, x, A)$满足$(F_\alpha)$。

定理12.1 设保守的q函数对$q(x)$—$q(x, A)$满足$\sup\limits_{x\in E}q(x)\leqslant M<\infty$,(从而$q$过程唯一，它就是最小$q$过程$\overline{P}(t, x, A)$，且$\overline{P}(t, x, E)\equiv 1$，满足 (12.5) 及倒退方程式$(B)$和前进方程式$(F)$.)则$\overline{P}(t, x, A)$是强遍历的($\pi$为其强遍历极限)的充要条件是：

$$\langle Q\rangle: \begin{cases}\int_E \mu(dx)\widetilde{q}(x, A)=0,\\ \mu\in\mathscr{L}^+, \ \mu(E)=1\end{cases}$$

恰有唯一解π，且π满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_E \pi(dx)\int_E \rho_\alpha^{(n)}(x, dy)\psi_\alpha^{(0)}(y, A)=\frac{\pi(A)}{\alpha} \tag{12.6}$$

$$r(e^{t\widetilde{q}}-\pi)<1. \tag{12.7}$$

其中$\rho_\alpha^{(n)}$，$\psi_\alpha^{(n)}$如命题12.6所定义，$r(\mu)$表*Banach*代数$\widetilde{\mathscr{A}}$中的元素μ的谱半径，

$$e^{t\widetilde{q}}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\widetilde{q}^{\,n}}{n!}.$$

注意：由于$\sup\limits_{x\in E}q(x)\leqslant M<\infty$，所以$\tilde{q}\in\widetilde{\mathscr{A}}$，故$\tilde{q}^n$有定义，又$\|\tilde{q}\|\leqslant 2M$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\tilde{q}^n}{n!}$$

在$\widetilde{\mathscr{A}}$中依范数收敛到$\bar{P}(t,\ x,\ A)=e^{t\tilde{q}}$。

此定理不但给出了强遍历性的充要条件(从q函数对出发，条件全部加在q函数对上)，而且给出了求强遍历极限的一种方法，那就是解方程式$\langle Q\rangle$。若$\langle Q\rangle$无解或解不唯一，或者$\langle Q\rangle$的解虽唯一，但不同时满足(12.6)、(12.7)，则$\bar{P}(t,\ x,\ A)$不是强遍历的，因而不须求强遍历极限。若$\langle Q\rangle$的解唯一且满足(12.6)、(12.7)，则$\langle Q\rangle$的唯一解就是强遍历极限。

证：必要性　设$\bar{P}(t,\ x,\ A)$是强遍历的，π是其强遍历极限，即是

$$\lim_{t\to\infty}\|\bar{P}(t,\ \cdot,\ \cdot)-\pi\|=0.$$

则由定理10.5知：$\bar{P}(t,\ x,\ A)$属于$\mathscr{G}^h$(定义可参见定理10.5前的说明)，π是其伴随测度，且(12.7)成立。再由

$$\pi(A)=\int_E\pi(dx)\bar{P}(t,\ x,\ A)$$

取拉氏变换并利用命题12.6可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_E\pi(dx)\int_E\rho_\alpha^{(n)}(x,\ dy)\psi_\alpha^{(0)}(y,\ A)$$

$$=\int_E\pi(dx)\overline{\Psi}(\alpha,\ x,\ A)=\frac{1}{\alpha}\pi(A).$$

此即(12.6)成立，又由于$\sup\limits_{x\in E}q(x)\leqslant M$，所以$\pi\in\mathscr{L}_q^+$。显然

$$\int_E\pi(dx)\pi(A)=\pi(A),$$

所以用命题12.5得

$$\int_E \pi(dx)\tilde{q}(x, A) = 0.$$

而$\pi \in \mathscr{L}^+$，$\pi(E) = 1$是显然的，故π是$\langle Q\rangle$的一个解。

设$\langle Q\rangle$还有另一解π^*，仍用命题12.5，必有

$$\pi^*(A) = \int_E \pi^*(dx)\pi(A) = \pi(A), \quad (A \in \mathscr{E}),$$

所以$\langle Q\rangle$的解唯一。

充分性　设$\langle Q\rangle$有唯一解π且满足(12.6)、(12.7)。由(12.6)知

$$\int_E \pi(dx)\overline{\Psi}(\alpha, x, A) = \frac{\pi(A)}{\alpha},$$

所以

$$\int_0^\infty dt\left[e^{-\alpha t}\left(\int_E \pi(dx)\overline{P}(t, x, A) - \pi(A)\right)\right] = 0.$$

但是

$$\int_E \pi(dx)\overline{P}(t, x, A) - \pi(A)$$

是t的连续函数，因此，由拉氏变换的唯一性得知

$$\int_E \pi(dx)\overline{P}(t, x, A) = \pi(A).$$

这说明$\overline{P}(t, x, A)$属于$\mathscr{G}^h$，π是其伴随测度．因此，由(12.7)，再用定理10.5得知$\overline{P}(t, x, A)$是强遍历的，而且

$$\lim_{t\to\infty}\|\overline{P}(t, \cdot, \cdot) - \pi\| = 0.$$

下面我们改变研究主题．研究空间$\mathscr{L}_Q$的分解。

定义12.4　设$p(t, x, A)$是任一标准准转移函数，$\mu \in \mathscr{L}$。称μ是$p(t, x, A)$的赋号盈测度，如果

$$\int_E \mu(dx)p(t, x, A) \leqslant \mu(A), \quad (t \geqslant 0, A \in \mathscr{E}). \tag{12.8}$$

若改(12.8)中的“$\leqslant$”为“$=$”，则称μ是$p(t, x, A)$的赋号诸测度

（或者调和测度）。

若$\mu\in\mathscr{L}^+$，且(12.8)成立，则称μ是$p(t, x, A)$的盈测度，类似地，可定义$p(t, x, A)$的谐（调和）测度。

若$\mu\in\mathscr{L}$，且

$$\lim_{t\to\infty}\int_E \mu(dx)p(t, x, A)\equiv 0, \tag{12.9}$$

则称μ是$p(t, x, A)$的广义的纯盈赋号测度。

若μ既是$p(t, x, A)$的盈测度又满足(12.9)，则称μ是$p(t, x, A)$的纯盈测度。

设$\Psi(\alpha, x, A)$是$p(t, x, A)$的拉氏变换，μ，$\nu\in\mathscr{L}$，如果

$$\mu(A)=\lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \nu(dx)\Psi(\alpha, x, A), \quad (A\in\mathscr{E}), \tag{12.10}$$

则称μ是ν的位势测度。

定理12.2 设q函数对$q(x)$—$q(x, A)$保守，$p(t, x, A)$为任一不断的q过程，且

$$\lim_{t\to\infty}p(t, x, A)=\pi(x, A)$$

存在，$\pi\in\tilde{\mathscr{A}}$，则对任何$\mu\in\mathscr{L}_q$，存在唯一的分解如下：

$$\mu=\mu_1+\mu_2,$$

其中μ_1是$p(t, x, A)$的赋号谐测度，μ_2是广义的纯盈赋号测度，而且μ_2还是某一赋号测度的位势测度，更明确地说，

$$\mu_1(A)=\int_E \mu(dx)\pi(x, A), \quad (A\in\mathscr{E}),$$

$$\mu_2(A)=\lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \sigma(dx)\Psi(\alpha, x, A), \quad (A\in\mathscr{E}),$$

$$\sigma(A)=-\int_E \mu(dx)\bar{q}(x, A), \quad (A\in\mathscr{E}),$$

$\overline{\Psi}(\alpha, x, A)$是$p(t, x, A)$的拉氏变换。

(1) 若A是$p(t, x, A)$的一个非常返集，即是

$$\int_0^\infty p(t, x, A)dt<\infty, \quad (x\in E),$$

则还有

$$\mu_1(A)=0;$$

(2) 若(t, x, A)是弱遍历的，则$\mu_1(A)=\mu(E)\pi(A)$；

(3) 若$p(t, x, A)$是强遍历的，则 $\mu_1(A)=\mu(E)\pi(A)$，且

$$\mu_2(A)=\lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \sigma(dx)\Phi(\alpha, x, A)$$

$$=\int_E \sigma(dx)\Phi(x, A),$$

其中$\Phi(\alpha, x, A)$、$\Phi(x, A)$如(12.2)、(12.4)所定义。

注意：由定理假设，条件（甲）显然成立，所以若 $p(t, x, A)$ 还是强遍历的，则 $p(t, x, A)$的遍历位势核 $\Phi(x, A)$ 必存在。

证：由于任一q过程皆满足倒退方程式(B_α)，所以

$$\mu(A)=\int_E \mu(dx)\alpha\Psi(\alpha, x, A)$$

$$-\int_E \mu(dx)\left(\int_E \tilde{q}(x, dy)\,\Psi(\alpha, y, A)\right).$$

令

$$\mu_1(A)=\lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \mu(dx)\alpha\Psi(\alpha, x, A)$$

$$=\int_E \mu(dx)\pi(x, A),$$

则易证：μ_1是$p(t, x, A)$的赋号谐测度．再令

$$\mu_2=\mu-\mu_1,$$

因为

$$\mu\in\mathscr{L}_q, \quad \|\Psi(\alpha, \cdot, \cdot)\|\leqslant\frac{1}{\alpha},$$

所以，用$Fubini$定理，有

$$\mu_2(A) = -\lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \mu(dx)\left(\int_E \bar{q}(x, dy)\Psi(\alpha, y, A)\right)$$
$$= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \sigma(dx)\Psi(\alpha, x, A).$$

又因为μ_1是$p(t, x, A)$的赋号谱测度，所以

$$\lim_{t\to\infty}\int_E \mu_2(dx)p(t, x, A)$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\int_E \mu(dx)\, p(t, x, A) - \int_E \mu_1(dx)p(t, x, A)\right]$$
$$= \int_E \mu(dx)\pi(x, A) - \mu_1(A) = 0, \quad (A\in\mathscr{E}),$$

此即μ_2是σ的位势，且μ_2是$p(t, x, A)$的广义的纯盈赋号测度。

(1) 若A是$p(t, x, A)$的一个非常返集，则由

$$\int_0^\infty p(t, x, A)dt < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} p(t, x, A) = \pi(x, A)$$

得 $\quad \mu_1(A) = 0.$

(2) 若$p(t, x, A)$是弱遍历的，则 $\pi(x, A)\equiv\pi(A)$，所以

$\mu_1(A) = \mu(E)\pi(A).$

(3) 若$p(t, x, A)$是强遍历的，由于$q(x)-q(x, A)$保守，即$\bar{q}(x, E)\equiv 0$，所以$\sigma(E) = 0$。因此

$$\mu_2(A) = \lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \sigma(dx)\Psi(\alpha, x, A)$$
$$= \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\int_E \sigma(dx)\left[\Psi(\alpha, x, A) - \frac{1}{\alpha}\pi(A)\right]\right)$$
$$= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_E \sigma(dx)\Phi(\alpha, x, A).$$

但是，

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\|\Phi(\alpha, \cdot, \cdot) - \Phi(\cdot, \cdot)\| = 0, \quad |\sigma|(E) < \infty,$$

所以

$$\mu_2(A) = \int_E \sigma(dx)\Phi(x, A).$$

最后我们证明分解的唯一性，若存在另一组满足定理要求的分解，即是

$$\mu=\mu_1^*+\mu_2^*.$$

μ_1^* 是 $p(t, x, A)$的赋号谐测度，μ_2^* 是广义的纯盈赋号测度，且是某一赋号测度ν的位势，则有

$$\mu_1^*(A)=\int_E\mu_1^*(dx)p(t, x, A)$$

$$=\int_E\mu(dx)P(t, x, A)-\int_E\mu_2^*(dx)P(t, x, A),$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_E\mu_2^*(dx)P(t, x, A)=0.$$

从上述二等式有

$$\mu_1^*(A)=\lim_{t\to\infty}\int_E\mu_1^*(dx)P(t, x, A)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_E\mu(dx)P(t, x, A)$$

$$=\int_E\mu(dx)\pi(x, A)=\mu_1(A),\quad (A\in\mathscr{E}).$$

唯一性获证。

附注：在此定理中并不要求μ是盈测度，而一般的Riesz分解定理要求μ是盈测度。如果μ是盈测度，则本定理中的μ_2是盈测度。

§13 对称性

设 $(E, \mathscr{E})$、$\mathscr{M}$、$\mathscr{L}$、$\widetilde{\mathscr{A}}$、$\mathscr{M}^+$、$\mathscr{L}^+$、$\widetilde{\mathscr{A}}$如§12所定义。

定义13.1 设$K(\cdot, \cdot)\in\widetilde{\mathscr{A}}$，称K是对称的，如果存在$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu(E)>0$，使

$$\int_B\mu(dx)K(x, A)=\int_A\mu(dx)K(x, B),\quad (A, B\in\mathscr{E}).\quad(13.1)$$

这时，称μ是K的对称测度，或者说K关于μ是对称的．记

$$Kf(x)=\int_E K(x,dy)f(y),\quad (f\in\mathscr{M},\ x\in E),$$

$$[\mu,\ K]\ (A,\ B)=\int_A \mu(dx)K(x,\ B),$$

则(13.1) 即是$[\mu,\ K]\ (A,\ B)=[\mu,\ K]\ (B,\ A)$．显然$\mu\otimes K=[\mu,\ K]\ (E,\ \cdot)$，其中$\otimes$为Banach代数$\widetilde{\mathscr{A}}$的乘法符号．

命题13.1 设$K\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$K$关于$\mu$是对称的，则$K^n$亦然，$K^n$表$\widetilde{\mathscr{A}}$中的元素$K$自乘$n$次．

证 任取$A,\ B\in\mathscr{E}$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_A \mu(dx)K^n(x,\ B)\\&=\int_A \mu(dx)\int_E K(x,\ dy)K^{n-1}(y,\ B)\\&=\int_E [\mu,\ K]\ (A,\ dy)\ K^{n-1}(y,\ B)\\&=\int_E [\mu,\ K]\ (dy,\ A)K^{n-1}(y,\ B)\\&=\int_E \mu(dy)K(y,\ A)K^{n-1}(y,\ B),\end{aligned}\tag{13.2}$$

仿之

$$\begin{aligned}&\int_A \mu(dx)K^n(x,\ B)\\&=\int_E \mu(dy)K^{n-1}(y,\ A)K(y,\ B),\end{aligned}\tag{13.3}$$

所以由(13.2)、(13.3) 得：

$$\begin{aligned}&\int_B \mu(dx)\ K^n(x,\ A)\\&=\int_E \mu(dy)K(y,\ B)K^{n-1}(y,\ A)\\&=\int_A \mu(dx)K^n(x,\ B).\end{aligned}$$

定理13.1 设 $K\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$\mu(E)>0$，则下列陈述等价：

(1) K关于μ是对称的；

(2) $\int_E \mu(dx)f(x)K(x, B)$

$=\int_B \mu(dx)\int_E K(x, dy)f(y)$，$(B\in\mathscr{E}, f\in b\mathscr{E}$或$\mathscr{E}^+)$；

(3) $\int_E \mu(dx)f(x)Kg(x)=\int_E \mu(dx)g(x)Kf(x)$，

$(f, g\in b\mathscr{E}$ (或$\mathscr{E}^+$))；

(4) $\int_E \mu(dx)(K^n h(x))(K^m g(x))$

$=\int_E \mu(dx)(K^s h(x))(K^t g(x))$，

$(m+n=s+t, h, g\in b\mathscr{E}$ (或$\mathscr{E}^+$))。

证：应用单调类定理（参看[20]第0章）易证：(1)⇒(2)→(3)。而(4)⇒(1)是显然的。

(3)⇒(4)。若(3)成立，则由命题13.1得知 $K^u(u=0, 1, 2, \cdots)$ 也是关于μ对称的，因此

$$\int_E \mu(dx)\ (K^n h(x))\ (K^m g(x))$$

$$=\int_E \mu(dx)g(x)K^m(K^n h(x))$$

$$=\int_E \mu(dx)g(x)\ (K^{m+n}h)(x),$$

此即(4) 成立。

定理13.2 设$K\in\widetilde{\mathscr{A}}^+$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$K$关于$\mu$是对称的，$K\leqslant 1$，则$\mu$是$K$的盈测度（即$\mu\otimes K\leqslant\mu$），若还有$K(\cdot, E)\equiv 1$，则$\mu$是$K$的谐测度（即$\mu\otimes K=\mu$）。

证：因为K关于μ对称，$K\leqslant 1$，所以

$$\mu(A)\geqslant\int_A\mu(dx)K(x,\ E)=\int_E\mu(dx)K(x,\ A),\ (A\in\mathscr{E})$$

此即μ是K的盈测度。若$K(x,\ E)\equiv 1$，则上式中的"$\geqslant$"可代之以"$=$"，此即μ是K的谐测度。

定理13.3 若$K\in\widetilde{\mathscr{A}}^+$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$K$关于$\mu$是对称的，且

$$\lim_{n\to\infty}K^n(x,\ A)=\widetilde{K}(x,\ A),\ (x\in E,\ A\in\mathscr{E}),$$

$$\widetilde{K}\in\widetilde{\mathscr{A}},\ \sup_{\substack{n\geqslant 1\\ x\in E}}K^n(x,\ E)<\infty,$$

则

(1) $\widetilde{K}$关于μ是对称的；

(2) $$\int_E\mu(dx)(\widetilde{K}h(x))(K^mg(x)-K^ng(x))=0,$$

$(m,\ n\geqslant 0,\ g,\ h\in b\mathscr{E})$；

(3) $\widetilde{K}\otimes K=K\otimes\widetilde{K}=\widetilde{K}$。

证：因K关于μ对称，所以K^n亦然，用第一编引理7.3得：

$$\int_E\mu(dx)f(x)\int_E\widetilde{K}(x,\ dy)g(y)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_E\mu(dx)f(x)\int_E K^n(x,\ dy)g(y)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_E\mu(dx)g(x)\int_E K^n(x,\ dy)f(y)$$

$$=\int_E\mu(dx)g(x)\int_E\widetilde{K}(x,\ dy)f(y),\ (f,\ g\in b\mathscr{E}).$$

用定理13.1得知(1)成立。

再用定理13.1(4)，有

$$\int_E\mu(dx)(K^{t-m}h(x))(K^mg(x))$$

$$=\int_E\mu(dx)\ (K^{t-n}h(x))(K^ng(x)),$$

令$t\to\infty$并应用控制收敛定理即得(2)。

由第一编引理7.3及控制收敛定理立得(3)。

定理13.4 若$K_n\in\widetilde{\mathscr{A}}$，$\mu\in\mathscr{L}^+$，$K_n$关于$\mu$是对称的，$n=1, 2, \cdots, m$，且

$K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m=K_m\otimes K_{m-1}\otimes\cdots\otimes K_1$，则$K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m$关于$\mu$是对称的。

证： 反复应用定理13.1有

$$\int_B\mu(dx)\int_E K_1(x, dx_1)\int_E K_2(x_1, dx_2)\cdots\int_E K_m(x_{m-1}, dx_m) I_A(x_m)$$

$$=\int_E\mu(dx)\left[\int_E K_2(x, dx_2)\int_E K_3(x_2, dx_3)\cdots\int_E K_m(x_{m-1}, dx_m) I_A(x_m)\right]\cdot\int_E K_1(x, dx_1)I_B(x_1)$$

$$=\int_E\mu(dx)\left[\int_E K_3(x, dx_3)\cdots\int K_m(x_{m-1}, dx_m)I_A(x_m)\right]\cdot\left[\int_E K_2(x, dx_2)\int_E K_1(x_2, dx_1)I_B(x_1)\right]$$

$$=\cdots$$

$$=\int_E\mu(dx)\left[\int_E K_m(x, dx_m)I_A(x_m)\right]\cdot\left[\int_E K_{m-1}(x, dx_{m-1})\int_E K_{m-2}(x_{m-1}, dx_{m-2})\cdots\int_E K_1(x_2, dx_1)\cdot I_B(x_1)\right]$$

$$=\int_E\mu(dx)I_A(x)\int_E K_m(x, dx_m)\int_E K_{m-1}(x_m, dx_{m-1})\cdots\int_E K_1(x_2, dx_1)I_B(x_1)$$

$$=\int_A\mu(dx)\int_E K_1(x, dx_1)\int_E K_2(x_1, dx_2)\cdots\int_E K_m(x_{m-1}, dx_m)\cdot I_B(x_m),$$

$(A, \ B \in \mathscr{E})$,

此即$K_1 \otimes K_2 \otimes \cdots \otimes K_m$关于$\mu$是对称的。

下面我们将利用Banach 代数$\widetilde{\mathscr{A}}$中的元素K的对称性概念，来研究马尔可夫过程及其转移函数的对称性问题。

定义13.2 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一完备概率空间，$\{\mathscr{F}_t, t \in [0, \infty)\}$是$\mathscr{F}$中一族单调非降子$\sigma$代数即是 $\mathscr{F}_t \supset \mathscr{F}_s (0 \leqslant s \leqslant t)$，$(E, \mathscr{E})$ 为可测空间，对任何$t \in [0, \infty)$，有：

$X_t : \Omega \longrightarrow E$,

如果

$X_t \in \mathscr{F}_t / \mathscr{E}, \quad (t \in [0, \infty))$,

则称$X = \{X_t, \ t \in [0, \infty)\}$是$\{\mathscr{F}_t\}$ 适应随机过程。若还有 $(E, \mathscr{E})$ 上的概率测度μ，及转移函数$P(s, t, x, A)$，使

(1) $P(X_0 \in A) = \mu(A), \ (A \in \mathscr{E})$;

(2) $\boldsymbol{E}(f(X_{s+t}) | \mathscr{F}_s) = P(s, s+t, X_s, f)$,

$(0 \leqslant s, \ t < \infty, \ f \in b\mathscr{E})$，其中$\boldsymbol{E}(Y | \mathscr{F}_s)$ 表Y对$\mathscr{F}_s$的条件期望，$P(s, s+t, x, f) = \int_E P(s, s+t, x, dy) f(y)$。则称$X$是适应于$\{\mathscr{F}_t\}$的以$\mu$为初始分布的以$P(s, t, x, A)$ 为转移函数的马尔可夫过程。如果$\{\mathscr{F}_t\}$未特别指明，那就意味着$\mathscr{F}_t = \sigma(X_s, \ s \leqslant t) = \sigma(\bigcup_{s \leqslant t} X_s^{-1}(\mathscr{E}))$是由$X_s (s \leqslant t)$ 所产生的σ代数，$\sigma(\mathscr{G})$ 表示由集合系$\mathscr{G}$所产生的σ代数。

马尔可夫过程X是时齐的即其转移函数是时齐的。

定义13.3 称马尔可夫过程$X = \{X_t, t \in [0, \infty)\}$是对称的，如果

$P(X_s \in A, \ X_t \in B) = P(X_t \in A, \ X_s \in B)$,

$(0 \leqslant s < t < \infty, \ A, \ B \in \mathscr{E})$.

称准转移函数$P(s, t, x, A)$ 是对称的，如果存在概率测度

μ,使

$$\int_A u_s(dx)P(s,\ t,\ x,B)=\int_B u_s(dx)P(s,\ t,\ x,A),$$
$$(A,\ B\in\mathscr{E},\ 0\leqslant s<t<\infty),$$

此处

$$u_s(A)=\int_E \mu(dx)P(0,\ s,\ x,\ A).$$

此时，称$P(s,\ t,\ x,\ A)$关于μ是对称的，而μ称为$P(s,\ t,\ x,\ A)$的对称测度。

显然，若$P(s,\ t,\ x,\ A)$是对称的，则对任何$0\leqslant s\leqslant t<\infty$，$P(s,\ t,\ \cdot,\ \cdot)$作为Banach 代数$\widetilde{\mathscr{A}}$中的元素是对称的。

定理13.5 设X是以$P(s,\ t,\ x,\ A)$为转移函数的马尔可夫过程，则X对称的充要条件是$P(s,\ t,\ x,\ A)$是对称的。

证：由定义即得。

定理13.6 设X是以μ为初始分布以$P(t,\ x,\ A)$为转移函数的时齐的马尔可夫过程，$P(t,\ x,\ A)$关于μ对称，如果$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<\infty$，$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1$，$t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2$，…，

$f:E^n\longrightarrow R^1$，

$f\in b\mathscr{E}^n$，（此处E^n表E的n重笛卡尔积，$\mathscr{E}^n$是$\mathscr{E}$的n重乘积σ代数），则

$$\boldsymbol{E}(f(X_{t_1},\ X_{t_2},\ \cdots,\ X_{t_n}))=\boldsymbol{E}(f(X_{t_n},\ X_{t_{n-1}},\ \cdots,\ X_{t_1})),$$

特别地，对于任何$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\in\mathscr{E}$，有

$$P(X_{t_1}\in A_1,\ \cdots,\ X_{t_n}\in A_n)=P(X_{t_1}\in A_n,\ \cdots,\ X_{t_n}\in A_1),$$

此处$\boldsymbol{E}$是期望算子，即是

$$\boldsymbol{E}(Y)=\int_\Omega Y dP.$$

证：令

$$S_m = t_{m+1} - t_m, \mu_t(A) = \int_E \mu(dx) P(t, x, A), \quad f_i \in b\mathscr{E},$$

$$h_m^n(x) = \int_E P(S_m, x, dx_{n-m}) \int_E P(S_{m+1}, x_{n-m}, dx_{n-m-1})$$

$$\cdots \int_E P(S_{n-1}, x_2, dx_1) f_{n-m}(x_{n-m}) \cdots f_1(x_1)$$

$$= \int_E P(S_{n-m}, x, dx_{n-m}) \int_E P(S_{n-m-1}, x_{n-m}, dx_{n-m-1})$$

$$\cdots \int_E P(s_1, x_2, dx_1) f_{n-m}(x_{n-m}) \cdots f_1(x_1),$$

$$(P_t f)(x) = \int_E P(t, x, dy) f(y),$$

$$(\mu, f) = \int_E \mu(dx) f(x),$$

则有

$$h_m^n(x) = P s_{n-m}(f_{n-m} \cdot h_{m+1}^n)(x).$$

又因为由定理13.1有

$$(\mu_{t_1}, g_1 P_t g_2) = (\mu_{t_1}, g_2 P_t g_1), \quad (t_1, t \geqslant 0, g_i \in b\mathscr{E}),$$

所以

$$\boldsymbol{E}(f_n(X_{t_1}) f_{n-1}(X_{t_2}) \cdots f_1(X_{t_n}))$$

$$= \int_E \mu_{t_1}(dx_n) \int_E P(s_1, x_n, dx_{n-1}) \cdots \int_E P(s_{n-1}, x_2, dx_1)$$
$$\cdot [f_n(x_n) f_{n-1}(x_{n-1}) \cdots f_1(x_1)]$$
$$= (\mu_{t_1}, f_n h_1^n)$$
$$= (\mu_{t_1}, f_n P s_{n-1}(f_{n-1} h_2^n))$$
$$= (\mu_{t_1}, f_{n-1} h_2^n P s_{n-1} f_n)$$
$$= (\mu_{t_1}, f_{n-1}(P s_{n-1} f_n) \cdot P s_{n-2}(f_{n-2} \cdot h_3^n))$$
$$= (\mu_{t_1}, f_{n-2} \cdot h_3^n P s_{n-2}(f_{n-1} P s_{n-1} f_n))$$

$$= \cdots$$

$$= (\mu_{t_1},\ f_2 h^{*}_{*\,1} \cdot P_{s_2}(f_3 P_{s_3}(\cdots(f_{n-1}P_{s_{n-1}}f_n)\cdots)))$$

$$= \boldsymbol{E}(f_1(X_{t_1})f_2(X_{t_2})\cdots f_n(X_{t_n})).$$

应用单调类定理（参看[20]第0章(2.5))可得

$$\boldsymbol{E}(f(X_{t_1},\cdots,\ X_{t_n})) = \boldsymbol{E}(f(X_{t_n},\ \cdots,\ X_{t_1})).$$

定理13.7 转移函数$P(s,t,x,A)$是对称的充要条件是：存在一个概率测度μ，使

$$\int_A \mu(dx)P(s,t,x,B) = \int_B \mu(dx)P(s,t,x,A), \qquad (13.4)$$

$(0 \leqslant s < t < \infty,\ A,\ B \in \mathscr{E})$。

这时有

$$\int_E \mu(dx)P(0,s,x,A) \equiv \mu(A), (s \geqslant 0). \qquad (13.5)$$

证：充分性　若存在概率测度μ使(13.4)成立，则

$$\int_E \mu(dx)P(0,s,x,\ A) = \int_A \mu(dx)P(0,s,x,E)$$

$$= \mu(A),$$

显然这时$P(s,t,x,A)$关于μ是对称的。

必要性　若$P(s,t,x,A)$关于某个μ是对称的，可证(13.4)、(13.5)成立。事实上，由对称性有

$$\int_A \mu_s(dx)\ P(s,t,x,B) = \int_B \mu_s(dx)\ P(s,t,x,A), \qquad (13.6)$$

其中

$$\mu_s(A) = \int_E \mu(dx)P(0,s,x,A), (s \geqslant 0,\ A \in \mathscr{E}) \qquad (13.7)$$

在(13.6)中取$s=0$并应用(13.7)知$\mu_0 = \mu$可得

$$\int_A \mu(dx)P(0,t,x,B) = \int_B \mu(dx)P(0,t,x,A). \qquad (13.8)$$

在(13.8)中取$B=E$并用(13.17)得：

$$\mu(A)=\int_A \mu(dx)P(0,t,x,E)$$

$$=\int_E \mu(dx)P(0,t,x,A)=\mu_t(A),\quad (t\geqslant 0, A\in\mathscr{E}) \quad (13.9)$$

由(13.6)、(13.9)得(13.4)和(13.5)。

下设$P(s,t,x,A)$是标准准转移函数，$R(\lambda,s,x,A)$是其拉氏变换(参看定义5.1)。

定义13.4 称 $R(\lambda,s,x,A)$ 是对称的，如果存在 $\mu_s(A)$，使$\mu_s(\cdot)\in\mathscr{L}^+$，$\mu(A)$是右连续函数，$\mu=\mu_0$是概率测度，而且

$$\int_0^\infty \mu_s(A)e^{-\lambda s}ds=\int_E \mu(dx)R(\lambda,0,x,A),\quad \begin{pmatrix}\lambda>0\\ A\in\mathscr{E}\end{pmatrix},\quad (13.10)$$

$$\int_A \mu_s(dx)R(\lambda,s,x,B)=\int_B \mu_s(dx)R(\lambda,s,x,A), \qquad (13.11)$$

$(s\geqslant 0,\ \lambda>0,\ x\in E,\ A,\ B\in\mathscr{E})$。

这时，称$R(\lambda,s,x,A)$关于μ_s对称。

定理13.8 对任意标准准转移函数$P(s,t,x,A)$，它对称的充要条件是$R(\lambda,s,x,A)$对称。

证：用拉氏变换之唯一性定理可证定理13.8。

系 1 若$P(s,t,x,A)$是标准转移函数(等价地，$\lambda R(\lambda,s,x,E)\equiv 1$)，则$R(\lambda,s,x,A)$关于$\mu$对称的充要条件是：

$$\int_A \mu(dx)\ R(\lambda,s,x,B)=\int_B \mu(dx)R(\lambda,s,x,A), \qquad (13.12)$$

$(\lambda>0,\ s\geqslant 0,\ A,B\in\mathscr{E},\ \mu$是概率测度)。

这时有

$$(\Delta_1):\quad \begin{cases}\int_0^\infty \mu_s(A)e^{-\lambda s}ds=\int_E \mu(dx)R(\lambda,0,x,A)\\ \mu_\cdot(A)\text{右连续},\mu_s(\cdot)\in\mathscr{L}^+,\mu_0=\mu\text{是概率测度，恰有}\end{cases}$$

μ作为其唯一解。

证：若$R(\lambda,s,x,A)$关于μ对称，(13.11)化为(13.12)，又由定义，(Δ_1)必有满足(3.11)的解μ_s。但是，

$$\lambda R(\lambda,s,x,E)\equiv 1,$$

所以由(Δ_1)及(13.11)有

$$\int_0^{\infty}\mu_s(A)\ e^{-\lambda s}ds=\int_E\mu(dx)R(\lambda,0,x,A)$$

$$=\int_A\mu(dx)R(\lambda,0,x,E)=\frac{\mu(A)}{\lambda}.$$

由拉氏变换的唯一性定理得：$\mu_s\equiv\mu$。此即(Δ_1)以μ作为其唯一解。

反之，若(13.12)成立，取$\mu_s\equiv\mu$，易证$R(\lambda,s,x,A)$关于μ对称。

定义13.5 称q函数$\tilde{q}(t,x,A)$（其定义参见定义4.1）是对称的，如果存在$\mu_t\in\mathscr{L}^+$，使

$$\int_E\mu_t(dx)q(t,x)<\infty, \tag{13.13}$$

$$\int_A\mu_t(dx)\ q(t,x,B)=\int_B\mu_t(dx)q(t,x,A) \tag{13.14}$$

$(0\leqslant s,\ t<\infty,\ x\in E,\ A,\ B\in\mathscr{E})$，$\mu_0=\mu$是概率测度，而且

$$\frac{d}{dt}\ \mu_t(A)=\int_E\mu_t(dx)\ \tilde{q}(0,x,A,),\ \ (t\geqslant 0,A\in\mathscr{E}), \tag{13.15}$$

其中$q(t,x,A)=\tilde{q}(t,x,A-\{x\})$，$q(t,x)=-\tilde{q}(t,x,\{x\})$。这时，称$\tilde{q}(t,x,A)$关于$\mu_t$对称。

定义13.6 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为任一测度空间，T为任一指标集，对任一$t\in T$，有

$$f_t:\ \Omega\to R^1,\qquad f_t\in\mathscr{F}/\mathscr{B}^1,$$

若

$$\lim_{h\to\infty}\sup_{t\in T}\int_{\{|f_t|>h\}}|f_t|d\mu=0,$$

则称$\{f_t, t\in T\}$关于测度μ是一致可积的。

引理13.1 若$\{f_t, t\in T\}$关于μ是一致可积的，且$\mu(\Omega)<\infty$，则

$$\int_\Omega \liminf_{t\to t_0} f_t\,d\mu\leqslant\liminf_{t\to t_0}\int_\Omega f_t d\mu$$

$$\leqslant\limsup_{t\to t_0}\int_\Omega f_t d\mu\leqslant\int_\Omega \limsup_{t\to t_0} f_t\,d\mu \text{ 。}$$

证： 令

$$f_t^{(a)}=\max\{a, f_t\}\geqslant a,$$

则由Fatou引理有

$$\int_\Omega \liminf_{t\to t_0} f_t\,d\mu\leqslant\int_\Omega \liminf_{t\to t_0} f_t^{(a)}\,d\mu$$

$$\leqslant\liminf_{t\to t_0}\int_\Omega f_t^{(a)}d\mu.$$

但是

$$\int_\Omega f_t^{(a)}d\mu=\int_\Omega f_t d\mu+\int_\Omega (f_t^{(a)}-f_t)d\mu,$$

$$\int_\Omega (f_t^{(a)}-f_t)d\mu=\int_{\{f_t<a\}}(a-f_t^{(a)})d\mu,$$

当$a<0$时我们有

$$\left|\int_{\{f_t<a\}}a\,d\mu\right|\leqslant\int_{\{f_t<a\}}|f_t|d\mu$$

$$\leqslant\int_{\{|f_t|>|a|\}}|f_t|d\mu,$$

$$\left|\int_{\{f_t<a\}}f_t d\mu\right|\leqslant\int_{\{f_t<a\}}|f_t|d\mu$$

$$\leqslant \int_{\{|f_t|>|a|\}} |f_t| d\mu.$$

因此，由$\{f_t\}$对μ一致可积得知：任给$\varepsilon>0$，存在$A>0$，当$|a|>A$时有：

$$\int_{\{|f_t|>|a|\}} |f_t| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}，（对一切t\in \mathrm{T}）.$$

所以，当$a<-A$时有

$$\left|\int_\Omega (f_t^{(a)} - f_t) d\mu \right| < \varepsilon, (t\in T).$$

因此，当$a<-A$时有

$$\liminf_{t\to t_0} \int_\Omega f_t^{(a)} d\mu \leqslant \liminf_{t\to t_0} \int_\Omega f_t d\mu + \varepsilon.$$

由$\varepsilon>0$可以任意小得知

$$\int_\Omega \liminf_{t\to t_0} f_t \, d\mu \leqslant \liminf_{t\to t_0} \int_\Omega f_t d\mu.$$

仿之可证：

$$\limsup_{t\to t_0} \int_\Omega f_t d\mu \leqslant \int_\Omega \limsup_{t\to t_0} f_t \, d\mu.$$

定理13.9 设q函数$\tilde{q}(t,x,A)$对t连续，且存在一个关于μ为对称的q过程$P(s,t,x,A)$，对任一固定的$s\geqslant 0$，$\{q(t,\cdot), t\geqslant 0\}$对$\mu_s$一致可积，此处

$$\mu_s(A) = \int_E \mu(dx) P(0,s,x,A)，(s\geqslant 0，A\in \mathscr{E})，$$

则 $\tilde{q}(t,x,A)$是对称的.

证：由定理6.2(2)有：

$$\left| \frac{P(s,s+t, x, A) - I_A(x)}{t} \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{P(s,s+t,x,A-\{x\})}{t} \right| + I_A(x) \frac{1-P(s,s+t,x,\{x\})}{t}$$

$$\leqslant \frac{2}{t}\left(1-e^{-\int_s^{s+t} q(u,x)du}\right)$$

$$\leqslant 2q(s+\theta t,x),\quad (0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

所以由$\{q(t,\cdot),\ t\geqslant 0\}$对$\mu_s$一致可积得知：

$$\left\{\left|\frac{P(s,s+t,\cdot,A)-I_A(\cdot)}{t}\right|,\ t>0\right\}$$

对μ_s是一致可积的。

因此，由引理(3.1)及$P(s,t,x,A)$的对称性可得

$$\int_A \mu_s(dx)\ \tilde{q}(s,x,B)$$

$$=\lim_{t\to 0+}\int_A \mu_s(dx)\ \frac{P(s,s+t,x,B)-I_B(x)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\int_B \mu_s(dx)\ \frac{P(s,s+t,x,A)-I_A(x)}{t}$$

$$=\int_B \mu_s(dx)\ \tilde{q}(s,x,A).$$

显然此式等价于(3.14)。

类似地，可以证明

$$\frac{d}{dt}\mu_t(A)=\int_E \mu_t(dx)\tilde{q}(0,x,A).$$

定理13.10 设q函数$\tilde{q}(t,x,A)$是t的连续函数，对任一固定的$s\geqslant 0$，$\{q(t,\cdot),\ t\geqslant 0\}$对$\mu_s$一致可积，其中$\mu_s\in\mathscr{L}^+$，$\mu_s(A)$是右连续函数，$\mu_0=\mu$是概率测度，设$R(\lambda,s,x,A)$是任一$q$过程的拉氏变换，则它关于$\mu_s$对称的充要条件是：

$$\int_B \mu_s(dx)\int_E q(s+t,x,dy)\ e^{-\int_s^{s+t} q(v,x)dv}\ R(\lambda,s+t,y,A)$$

$$=\int_A \mu_s(dx)\int_E q(s+t,x,dy)\,e^{-\int_s^{s+t} q(v,x)dv}\ R(\lambda,s+t,y,B),$$

$(0\leqslant s,\ t<\infty,\ A,B\in\mathscr{E})$, (13.16)

$$\int_0^\infty \mu_s(A)e^{-\lambda s}ds=\int_E \mu(dx)R(\lambda,0,x,A), \tag{13.17}$$

证：充分性　由引理7.2，$R(\lambda,s,x,A)$满足倒退方程式

$$(B_\lambda):\ R(\lambda,s,x,\ A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}I_A(x)e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}dt$$

$$+\int_0^\infty dt\int_E q(s+t,x,dy)\left[e^{-\lambda t}e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}R(\lambda,s+t,y,A)\right].$$

由(13.16)及(B_λ)有：

$$\int_A \mu_s(dx)R(\lambda,s,x,B)$$

$$=\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_A I_B(x)\ e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}\mu_s(dx)\ \right]$$

$$+\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_A \mu_s(dx)\ (\int_E q(s+t,x,dy)e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}\right.$$

$$\left.\cdot R(\lambda,s+t,y,B))\right]$$

$$=\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_B I_A(x)\ e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}\mu_s(dx)\ \right]$$

$$+\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_B \mu_s(dx)\ (\int_E q(s+t,x,dy)\ e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}\right.$$

$$\left.\cdot R(\lambda,s+t,y,A))\right]$$

$$=\int_B \mu_s(dx)R(\lambda,s,x,A).\ (\lambda>0,s\geqslant 0,A,B\in\mathscr{E}). \tag{13.18}$$

所以$R(\lambda,s,x,A)$关于μ_s对称。

必要性　设$R(\lambda,s,x,A)$关于μ_s对称。由倒退方程式(B_λ)有：

$$\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_B \mu_s(dx)\int_E q(s+t,x,dy)\cdot\right.$$

$$\left.e^{-\int_s^{s+t}q(v,x)dv}R(\lambda,s+t,y,A)\right]$$

$$= \int_0^\infty dt \left[e^{-\lambda t} \int_A \mu_s(dx) \int_E q(s+t, x, dy) \cdot e^{-\int_s^{s+t} q(v,x)dv} R(\lambda, s+t, y, B) \right].$$

但是，由第一编引理7.3，

$$\int_E q(s+t, x, dy) e^{-\int_s^{s+t} q(v,x)dv} R(\lambda, s+t, y, B)$$

作为 t 的函数在$[0, \infty)$上是连续的，而且界于$[0, q(s+t, x)/\lambda]$，此外，我们还假定了：$\{q(t,\cdot),\ t \geqslant 0\}$关于$\mu_s$一致可积，所以由引理13.1得知

$$\int_A \mu_s(dx) \int_E q(s+t, x, dy) e^{-\int_s^{s+t} q(v,x)dv} R(\lambda, s+t, y, B)$$

作为t的函数在$[0, \infty)$上连续．由拉氏变换之唯一性得知条件是必要的。

定理13.11 若$\tilde{q}(t, x, A)$是保守的q函数，则它是对称的充要条件是存在一个概率测度μ，使得

$$\int_A \mu(dx)\, q(t, x, B) = \int_B \mu(dx) q(t, x, A),\ (t \geqslant 0, A, B \in \mathscr{E}),$$

且上式两边皆有限．此时

$$(\Delta_2)\ \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mu_t(A) = \int_E \mu_t(dx)\ \tilde{q}(0, x, A) \\ \int_A \mu_t(dx) q(t, x, B) = \int_B \mu_t(dx) q(t, x, A) \\ (A,\ B \in \mathscr{E},\ t \geqslant 0), \\ \mu_t \in \mathscr{L}^+; \mu_0 = \mu\text{是概率测度}, \end{cases}$$

恰以μ作为其唯一解。

证：充分性 设条件成立，取 $\mu_t \equiv \mu$，$(t \geqslant 0)$，则由保守性知：

$$\int_E \mu_s(dx)\ q(t, x) = \int_E \mu(dx) q(t, x, E) < \infty,$$

且μ_t是(Δ_2)的一个解。故$\widetilde{q}(t,x,A)$关于$\mu_s\equiv\mu$对称。

此时，若(Δ_2)还有另一解$\widetilde{\mu}_t$，则

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mu}_t(A)=\int_E\widetilde{\mu}_t(dx)\widetilde{q}(0,x,A)$$

$$=\int_A\widetilde{\mu}_t(dx)\widetilde{q}(0,x,E)=0,$$

所以

$$\widetilde{\mu}_t=\widetilde{\mu}_0=\mu,$$

此即(Δ_2)恰以μ为唯一解。

必要性　若$\widetilde{q}(t,x,A)$对称，则(Δ_2)有一解μ_t。但是$\widetilde{q}(t,x,A)$保守，所以

$$\frac{d}{dt}\mu_t(A)=\int_E\mu_t(dx)\widetilde{q}(0,x,A)$$

$$=\int_A\mu_t(dx)\widetilde{q}(0,x,E)=0.$$

因此$\mu_t\equiv\mu_0=\mu$，所以条件成立。定理证毕。

定理13.12　设q函数$\widetilde{q}(t,x,A)$保守，且是t的连续函数，再设它关于μ对称，且

$$\int_E P_0(s,s+t,x,dy)\int_E q(s+t,y,dz)R_n(\lambda,s+t,z,A)$$

$$=\int_E(R_n(\lambda,s+t,x,dy)\int_E q(s+t,y,dz)\,p_0(s,s+t,z,A),\tag{13.19}$$

$(U_{\lambda,s})$只有零解（对一切$\lambda>0$，$s\geqslant0$），则恰有唯一一个不断的关于μ对称的q过程，它就是最小q过程$\bar{P}(s,t,x,A)$。此处$P_n(s,s+t,x,A)$、$R_n(\lambda,s,x,A)$、$(U_{\lambda,s})$的意义请参看引理7.1和定理7.1。

证：若$\widetilde{q}(t,x,A)$保守，是t的连续函数，$(U_{\lambda,s})$只有零解，则由定理7.1得知，恰有唯一一个q过程，它是不断的，而且就最

小的q过程$\bar{P}(s,t,x,A)$。令其右拉氏变换为$\bar{R}(\lambda, s, x, A)$。由于$\tilde{q}(t,x,A)$关于$\mu$对称，所以

$$\int_A \mu(dx)\ q(t,x,B) = \int_B \mu(dx) q(t,x,A),$$

$$(t \geqslant 0, A, B \in \mathscr{E})。$$

显然$R_0(\lambda,s,\cdot,\cdot)$关于$\mu$对称，且由定义有：

$$R_{n+1}(\lambda, s,x,A) = \int_0^\infty dt\Big[e^{-\lambda t}\int_E P_0(s,\ s+t,\ x,\ dy)$$

$$\cdot\int_E q(s+t,y,dz)R_n(\lambda,\ s+t,\ z,A)\Big],$$

因此，由定理13.4及本定理的假设，可以对n作归纳法来证明$R_n(\lambda,s,\cdot,\cdot)$关于$\mu$对称，$(n \geqslant 0)$，因此

$$\int_B \mu(dx)\bar{R}(\lambda,s,x,\ A) = \int_A \mu(dx)\bar{R}(\lambda,s,x,B),$$

$(\lambda > 0,\ s \geqslant 0,\ A,\ B \in \mathscr{E})$。

显然，若令$\mu_t \equiv \mu$，则

$$\int_0^\infty \mu_t(A)e^{-\lambda t}dt = \frac{\mu(A)}{\lambda} = \int_A \mu(dx)\bar{R}(\lambda,0,x,E)$$

$$= \int_E \mu(dx)\bar{R}(\lambda,0,x,A),$$

所以$\bar{R}(\lambda,s,x,A)$关于μ对称。

系1 若q函数$\tilde{q}(t,\ x,\ A) = \tilde{q}(x,A)$不依赖于$t \geqslant 0$，$\tilde{q}(x,A)$保守，关于$\mu$对称，$(U_\lambda(s))$恰以0为其解，则$q$过程是唯一的不断的关于$\mu$是对称的。$(U_\lambda(s))$的定义请见第二编命题3.2。

证：由第二编定理5.1和命题5.2，以及本编定理13.12，为证系1，只须证明（13.19）成立。但$p_n(s,\ s+t,\ x,\ A)$，$q(s,x,A)$皆不依赖于s，我们可以用归纳法证明(13.19)成立。

定理13.13 如果q函数$\tilde{q}(x,A)$（不依赖t）是对称的，则最小q过程亦为对称的。

证： 因$\tilde{q}(x,A)$是对称的，故有$\mu_t \in \mathscr{L}^+$，$\mu_0 = \mu$是概率测度，它们满足

$$\int_A \mu_t(dx) q(x, B) = \int_B \mu_t(dx) q(x, A),$$

$$\int_E \mu_t(dx) q(x) < \infty,$$

$$\frac{d}{dt}\mu_t(A) = \int_E \mu_t(dx) \tilde{q}(x, A).$$

因为最小q过程的拉氏变换是：

$$\bar{R}(\lambda, x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda, x, A),$$

$$R_0(\lambda, x, A) = \frac{I_A(x)}{\lambda + q(x)},$$

$$R_{n+1}(\lambda, x, A) = \int_E R_0(\lambda, x, dy) \int_E q(y, dz) R_n(\lambda, z, A), \quad (n \geqslant 0).$$

用归纳法易证：

$$\int_E R_0(\lambda, x, dy) \int_E q(y, dz) R_n(\lambda, z, A)$$
$$= \int_E R_n(\lambda, x, dy) \int_E q(y, dz) R_0(\lambda, z, A), \quad (n \geqslant 0).$$

再用归纳法还可证明：

$$\int_A \mu_t(dx) R_n(\lambda, x, B) = \int_B \mu_t(dx) R_n(\lambda, x, A),$$

$(n \geqslant 0,\ \lambda > 0,\ A,\ B \in \mathscr{E})$。

所以

$$\int_A \mu_t(dx) \bar{R}(\lambda, x, B) = \int_B \mu_t(dx) \bar{R}(\lambda, x, A),$$

$(\lambda > 0,\ A,\ B \in \mathscr{E})$，

但是每一个q过程皆满足倒退方程式(B_λ)：

$$(\lambda+q(x))\bar{R}(\lambda,x,A)-\int_E q(x,dy)\bar{R}(\lambda,y,A)=I_A(x).$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(A)dt\\&=\frac{1}{\lambda}\left[\mu_0(A)+\int_0^\infty\left(e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}\mu_t(A)\right)dt\right]\\&=\frac{1}{\lambda}\left[\mu_0(A)+\int_0^\infty dt\left(e^{-\lambda t}\int_E\mu_t(dx)\tilde{q}(x,A)\right)\right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_E\mu_0(dx)\bar{R}(\lambda,x,A)\\&=\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_E\mu_t(dx)\left((\lambda+q(x))\bar{R}(\lambda,x,A)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\int_E q(x,dy)\bar{R}(\lambda,y,A)\right)\right]\\&=\int_0^\infty dt\left[e^{-\lambda t}\int_E\mu_t(dx)I_A(x)\right]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mu_t(A)dt.\end{aligned}$$

定理证毕。

系1 若$\tilde{q}(x,A)$是对称的，$(U_\lambda(s))$以0为其唯一解，则q过程唯一且对称。此外，此q过程是不断的充要条件是$\tilde{q}(x,A)$保守。

证： 由第二编命题5.2、定理5.1及本编定理13.13即得系1。

定理13.14 设q函数$\tilde{q}(x,A)$保守且对称，则有：

(1) $\dim U_\lambda(s)=0\Rightarrow q$过程是唯一的不断的对称的；

(2) $\dim U_\lambda(s)>0\Rightarrow$存在无穷多个不断的对称的$q$过程；

(3) $\dim U_\lambda(s)=1$，则下面定义的$\mathscr{P}$就是全部q过程，每一个q过程都是对称的，而且存在无穷多个不断的对称的q过程，

(此处$\dim U_\lambda(s)$的意义可参见第二编命题3.3。)

$$\mathscr{R}=\left\{R(\lambda,x,A):\begin{array}{l}R(\lambda,x,A)=\overline{R}(\lambda,x,A)+\overline{\xi}(\lambda,x)\varphi_\lambda(A),\\ \varphi_\lambda(A)=\psi_\lambda(A)(c+\lambda\psi_\lambda(E))^{-1},\quad c\geqslant 0,\\ c\text{与}\psi_\lambda\text{不同时为}0,\\ \psi_\lambda\in\mathscr{L}^+,\ \text{并满足}\\ \psi_\nu(A)=\int_E\psi_\lambda(dx)M(\lambda,\nu,x,A),\end{array}\right\},$$

$$\lambda>0,\ \nu>0,A\in\mathscr{E}$$

$\overline{\xi}(\lambda,x)=1-\lambda\overline{R}(\lambda,x,E)$, $M(\lambda,\ \nu,\ x,\ A)=I_A(x)-(\lambda-\nu)\cdot\overline{R}(\nu,x,A)$。

证：(1) 由定理13.13系1可得(1)。

(2) 若$\dim U_\lambda(S)>0$。由第二编定理4.2得知$\mathscr{R}$是一族q过程，且当$\dim U_\lambda(S)=1$时，它就是全部q过程（那儿的$\Psi(\lambda,x,A)$相当于此处的$R(\lambda,x,A)$，Ψ_2相当于此处$\mathscr{R}$。)。再用$\bar{q}(x,A)$的保守性及对称性得知：存在一个概率测度μ，使得：

$$\int_B\mu(dx)q(x,\ A)=\int_A\mu(dx)q(x,B),\quad (A,B\in\mathscr{E}).$$

由定理13.13我们有（而今一切$\mu_i=\mu$）：

$$\int_A\mu(dx)\overline{R}(\lambda,x,B)=\int_B\mu(dx)\overline{R}(\lambda,x,A),$$

$$(\lambda>0,\quad A,\quad B\in\mathscr{E}),$$

$$\int_E\mu(dx)\overline{R}(\lambda,x,A)=\int_0^\infty\mu(A)e^{-\lambda t}dt=\frac{\mu(A)}{\lambda},$$

$$(\lambda>0,\quad A\in\mathscr{E}).$$

因此，

$$0\leqslant\int_A\mu(dx)\,\overline{\xi}(\lambda,x)\leqslant\int_E\mu(dx)\,\overline{\xi}(\lambda,x)$$

$$=\int_E\mu(dx)(1-\lambda\overline{R}(\lambda,x,E))=0,\quad (A\in\mathscr{E}).$$

所以

$$\int_A \mu(dx)\,\xi(\lambda, x) \equiv 0,$$

从而对每个$R(\lambda, x, A) \in \mathscr{R}$，有

$$\int_A \mu(dx) R(\lambda, x, B) = \int_A \mu(dx) \overline{R}(\lambda, x, B)$$

$$= \int_B \mu(dx) \overline{R}(\lambda, x, A) = \int_B \mu(dx) R(\lambda, x, A), \quad (A, B \in \mathscr{E}),$$

$$\int_E \mu(dx) R(\lambda, x, A)$$

$$= \int_E \mu(dx)\, \overline{R}(\lambda, x, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu(A) dt.$$

此即$\mathscr{R}$中每一个$R(\lambda, x, A)$都是对称的．由第二编命题5.2$\mathscr{R}$中存在无穷多个不断的q过程．(第二编(5.5)中构造的q过程均为不断的q过程，且它们都在$\mathscr{R}$中，而（5.5）对不同的$y \in E$，可构造无穷多个不断的q过程.)

(3) 由(2) 和第二编定理4.2得(3)．

参 考 文 献

〔1〕 K. Yosida, Functional analysis, Springer—Verlag, 1980 (sixth edition).

〔2〕 E. Hille, Functional analysis and semi—groups, New york, 1948.

〔3〕 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1958.

〔4〕 Е.Б.Дынкин, Основания Теории Марковских процессов, Москва, 1959.

〔5〕 Е.Б.Дынкин, Марковские процессы, Москва, 1963.

〔6〕 J.L.Doob, Stochastic processes, New york. 1953.

〔7〕 J.L.Kelley, General topology, New, york, 1955.

〔8〕 P.R. Halmos, Measure theory, New york, 1950.

〔9〕 胡迪鹤：《抽象空间中q—过程的构造理论》，《数学学报》，16(1966)2，150—165.

〔10〕 胡迪鹤：《抽象空间中q—过程的构造理论（II）》，《数学学报》，21(1978)2，190—192.

〔11〕 胡迪鹤：《度量空间中的转移函数的强连续性、Feller性及强马尔可夫性》，《数学学报》，20(1977)4，298—300.

〔12〕 胡迪鹤：《论纯间断的马尔可夫过程》，《武汉大学学报(自然科学版)》，1978年第4期，1—18.

〔13〕 胡迪鹤：《论纯间断的马尔可夫过程(II)》，《武汉大学学报(自然科学版)》，1979年第1期，15—38.

〔14〕 胡迪鹤，《抽象空间中q过程的唯一性准则》，《数学学报》，23(1980)5，750—757.

〔15〕 胡迪鹤：《抽象空间中非时齐的马氏过程的分析理

论(I)》，《数学学报》，22(1979)4，420—437。
〔16〕 胡迪鹤：《抽象空间中非时齐的马氏过程的分析理论(II)》，《数学学报》，22(1979)5，530—545。
〔17〕 胡迪鹤：《抽象空间中非时齐的马氏过程的分析理论(III)》，《数学学报》，22(1979)6，643—652。
〔18〕 胡迪鹤：《抽象空间中马氏过程的强遍历性及收敛速度》，《数学学报》，27(1984)3,293—304。
〔19〕 胡迪鹤，抽象空间中q过程的遍历位势，《数学学报》，27(1984)4,469—481。
〔20〕 R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, Markov processes and potential theory, New york,1968。
〔21〕 M. Loeve, Probability theory, New york,1955。
〔22〕 D. G. Kendall, Some analytical properties of continuous stationary Markov transition functions, Tran. Amer. Math. Soc. 78(1955), 529—540。
〔23〕 Г. M. 菲赫金哥尔茨，《微积分学教程》，第二卷第二分册（北京大学高等数学教研室译），高等教育出版社，1954。
〔24〕 C. E. Richart, General theory of Banach algebras, New york, 1960。
〔25〕 D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton University Press, 1946。
〔26〕 R. K. Getoor, Markov processes, Ray processes and right processes, Springer—Verlag, 1975。
〔27〕 王梓坤：《随机过程论》，科学出版社，1978。
〔28〕 严士健、王隽骧、刘秀芳：《概率论基础》，科学出版社，1982。

〔29〕 侯振挺、郭青峰：《齐次可列马尔可夫过程》，科学出版社，1978。
〔30〕 侯振挺：《Q过程的唯一性准则》，湖南科学技术出版社，1982。
〔31〕 钱敏、侯振挺等：《可逆马尔可夫过程》，湖南科学技术出版社，1979。
〔32〕 杨向群：《可列马尔科夫过程构造论》，湖南科学技术出版社，1980。
〔33〕 王梓坤：《生灭过程与马尔科夫链》，科学出版社，1980。
〔34〕 胡迪鹤：《可数状态的马尔可夫过程论》，武汉大学出版社，1983。
〔35〕 胡迪鹤：《可逆的马尔可夫核》，《武汉大学学报(数学专刊)》，1980年第1期，P.63—82。
〔36〕 陈木法：《抽象空间中的可逆的马尔可夫过程》，数学年刊，3—4(1980)。
〔37〕 陈木法、郑小谷：《q过程的唯一性准则》，中国科学，1982年第4期，P.288—308
〔38〕 D.Isaacson and G.R. Luecke, Strongly ergodic Markov chains and rates of convergence using spectral conditions, Stochastic processes and their applications, 7(1978) 113—121.
〔39〕 J.L. Doob, Asymptotic properties of Markoff transition probabilities, Tran. Amer. Math.Soc. 63(1948)393—421.
〔40〕 J. L. Doob, Discrete potential theory and boundaries, J. Math. and Mech., 8(1959)433—458.
〔41〕 A. M. Яглом, The ergodic principle for Markov

processes with stationary distribution, Д.А.Н.(С.С.С.Р.), 54(1947)347—349.

〔42〕 D. Vere—Jones, Geometric ergodicity in denumerable Markov chains, Quart. J. Math. Oxford(2), 13(1962)7—28.

〔43〕 J. F. C. Kingman, The exponential decay of Markov transition probabilities, Proc. Lodon Math. Soc. 13(1963)337—358.

〔44〕 J. F. C. Kingman, Ergodic properties of Continuous time Markov processes and their discrete skeletons, Proc. London Math. Soc. 13(1963)593—604.

〔45〕 D.G.Kendall, Unitary dilations of Markov transition operators and the corresponding integral representations for transition probability matrices, in: U. Grenander ed., Probability and statistics, New york, 1959.

〔46〕 R.V. Chacon and D. S. Ornstein, A general ergodic theorem, Illinois J. Math., 4 (1960) 153—160.

〔47〕 R. Syski, Ergodic potential, stochastic processes and their applications, 7(1978)311—336.

〔48〕 Е. Б. Дынкин, граничная Теория Марковских процессов, у.м.н. 24(1969)3—42.

〔49〕 K. L. Chung, Markov chains with stationary transition probabilities, Springer—Verlag, 1960.

〔50〕 W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2, Second edition,

Wiley, New york, 1971.

[51] D. B. Ray, Resolvents, transition functions, and strongly Markovian processes, Ann. Math,. 70 (1959), 43—72.

[52] D. G. Austin, The generalized backword Kolmogorov equition in abstract space, Illinois Journal of Math., 3(1959), 532—537.

[53] W. Feller, On the integral—differential equitions of purely discontinuous Markoff processes, Tran. Amer. Math. Soc., 48(1940), 488—515.

[54] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equition, Ann. Math., 65(1957), 527—570.

索　引

十四划以上